

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

УДК 658.51.015.26

Ивахненко А. Г., Мюллер Й. А. Самоорганизация прогнозирующих моделей.— К.: Техніка, 1985; Берлин: ФЭБ Ферлаг Техник, 1984. — 223 с., ил.— Библиогр.: с. 219.

В пер.: 1 р. 60 к. 2500 экз.

В книге рассмотрены основные направления работ в области математического моделирования сложных систем по методу группового учета аргумента (МГУА). Описаны основные алгоритмы МГУА. В зависимости от вида заданных критериев и уровня помех находятся физические модели (для идентификации объекта и краткосрочного прогноза) или нефизические оптимальной сложности (для двухуровневого долгосрочного количественного прогноза).

Рассчитана на научных работников, а также может быть полезной инженерно-техническим работникам, занятым в области математического моделирования сложных систем.

Совместное издание издательства «Техніка» (Киев) и ФЭБ Ферлаг Техник (Берлин)

Перевод (главы 1, 2 и часть гл. 3) с немецкого (Berlin, VEB Verlag Technik, 1984) С. Ф. Козубовского

Рецензенты: д-р техн. наук Г. Ф. Зайцев, канд. техн. наук А. Н. Сильвестров

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи

Зав. редакцией З. В. Божко

И $\frac{2404000000-099}{M202 (04)-85}$ 42.85

© Издательство «Техніка», 1985
© VEB Verlag Technik, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Основные условные обозначения	8
Предисловие	9
Глава 1. Математические методы прогнозирования	12
1.1. ПРОГНОЗ И МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ	12
1.1.1. Задача прогнозирования	12
1.1.2. Постановка задачи прогнозирования в терминах теории автоматического управления	13
1.1.3. Постановка задачи прогнозирования в терминах теории информации	14
1.1.4. Количественные и качественные прогнозы	20
1.1.5. Краткосрочный и долгосрочный прогнозы	20
1.1.6. Экспериментальные методы прогнозирования	21
1.1.7. Прогнозирование в естественных науках	22
1.1.8. Требуемая априорная информация	23
1.2. ЭВРИСТИЧЕСКАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ	24
1.3. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕРМИНА «САМООРГАНИЗАЦИЯ»	26
Глава 2. Основные принципы самоорганизации моделей	27
2.1 САМООРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	27
2.1.1. Задачи интерполяции	27
2.1.2. Генерация моделей-претендентов с различной сложностью структуры	28
2.1.3. Принципы, на которых основаны алгоритмы самоорганизации	29
2.1.4. Выбор модели оптимальной сложности	35
2.1.5. Самоорганизация и использование априорной информации	36
2.1.6. Область применения моделей, получаемых при помощи самоорганизации	38
2.1.7. Устранение вредных признаков (или факторов) при помощи применяемых алгоритмов самоорганизации	40
2.1.8. Проверка адекватности моделей	40
2.2. АЛГОРИТМЫ САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ	42
2.2.1. Основная структура алгоритмов самоорганизации математических моделей	42
2.2.2. Однорядные (комбинаторные) алгоритмы МГУА	42
2.2.3. Многорядные алгоритмы МГУА	50
2.2.4. Последовательное выделение трендов с проверкой стационарности остатка	55
2.3. ВЫБОР ВИДА ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ И КЛАССА УРАВНЕНИЙ	65
2.3.1. Виды математических описаний	65
2.3.2. Выбор полных и частных описаний	66
2.3.3. Опорные функции МГУА	67
2.4. КРИТЕРИИ СЕЛЕКЦИИ — ЯЗЫК ОБЩЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА И ЭВМ	72
2.4.1. Выбор критерия селекции по его словесной формулировке	72
2.4.2. Проблема остроты выбора модели	73
2.4.3. Критерий регулярности $\Delta^2(B)$	74
2.4.4. Критерий минимума смещения (непротиворечивости) модели n_{cm}^2	75
2.4.5. Критерий для малых выборок	76
2.4.6. Критерий точности краткосрочного прогноза	78
2.4.7. Критерий баланса	79

2.4.8. Несколько других критериев	83
2.4.9. Информационный критерий	85
2.4.10. Комбинированные критерии	85
2.4.11. Последовательное применение (иерархия) критериев	86
2.5. СПОСОБЫ ОБРАЗОВАНИЯ КРИТЕРИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ	87
2.5.1. Нормирование переменных	87
2.5.2. Способы разделения таблицы данных на части	88
2.5.3. Оптимальное разделение таблицы данных на части	89
2.6. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МГУА	93
2.6.1. Принцип самоорганизации	93
2.6.2. Теоремы о минимуме точек	93
2.6.3. О вырождении информационной матрицы и об ошибке многорядности	94
2.6.4. О помехоустойчивости самоорганизации моделей	94
2.6.5. Теорема о невозрастании среднеквадратичной ошибки, измеряемой на обучающей последовательности	95
2.6.6. Самоорганизация модели при неполном информационном базисе	96
2.6.7. Имитационные методы моделирования и самоорганизация моделей	97
2.6.8. Помехоустойчивость критериев и алгоритмов МГУА	100
Глава 3. Идентификация и краткосрочный прогноз на основе самоорганизации моделей	104
3.1. ФИЗИЧЕСКИЕ И НЕФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	104
3.1.1. Самоорганизация физических моделей	104
3.1.2. Самоорганизация нефизических прогнозирующих моделей	106
3.1.3. Определение оптимального числа факторов	107
3.2. САМООРГАНИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	109
3.2.1. Алгебраические модели	109
3.2.2. Увеличение таблицы исходных данных при помощи объединения нескольких объектов в однородные классы	114
3.2.3. Структурная идентификация	117
3.2.4. Системы с переменными коэффициентами	118
3.3. САМООРГАНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	126
3.3.1. Модели объектов динамических систем	126
3.3.2. Самоорганизация моделей в виде полиномов Колмогорова-Габора	128
3.3.3. Самоорганизация разностных уравнений	131
3.3.4. Самоорганизация моделей циклических процессов	144
3.4. САМООРГАНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	150
3.4.1. Моделирование физических полей	150
3.4.2. Разностные аналоги дифференциальных уравнений физических полей	153
3.4.3. Обучение разностных шаблонов перемещением по всей площади таблицы данных и по вертикали	156
3.4.4. Различные подходы к построению моделей	160
3.5. ОБЪЕКТИВНЫЙ СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ (ОСА) ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТА И КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА	165
3.5.1. Обобщенный язык диалога как средство уменьшения степени участия человека в решении задач системного анализа, прогноза и управления	165
3.5.2. Обычный (субъективный) системный анализ	166

3.5.3. Самоорганизация модели оптимальной сложности в виде одного уравнения	168
3.5.4. Самоорганизация модели оптимальной сложности в виде системы уравнений (ОСА)	168
3.5.5. Разделение выходных переменных по степени экзогенности для восстановления закономерностей объекта моделирования	172
3.5.6. Гармонический критерий экзогенности переменных	174
3.5.7. МГУА — метод по принципу невода	178
3.6. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНО- И ДВУХМЕРНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	181
3.6.1. Самоорганизация безразмерных разностных моделей тренда на основе спектрального анализа	181
3.6.2. Прямое и обратное преобразование двумерных корреляционных функций для экстраполяции полей	187
Глава 4. Самоорганизация моделей для долгосрочного прогноза	191
4.1. ЗАДАЧА ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ	191
4.1.1. Постановка задачи	191
4.1.2. Особенности долгосрочного количественного прогноза	191
4.1.3. Время упреждения одноуровневого прогноза	192
4.2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПО ИНВАРИАНТУ И КРИТЕРИЮ БАЛАНСА	193
4.2.1. Интервал корреляции как мера степени размытости математического языка моделирования	193
4.2.2. Различие моделей нижнего и верхнего уровней	194
4.3. АЛГОРИТМЫ ДОЛГОСРОЧНОГО КОЛИЧЕСТВЕННОГО ПРОГНОЗА	196
4.3.1. Одноуровневый гармонический алгоритм долгосрочного прогноза циклических процессов	196
4.3.2. Двухуровневые алгоритмы долгосрочного прогноза	198
4.3.3. Этапы самоорганизации двухуровневых долгосрочных количественных прогнозов	199
4.4. АЛГОРИТМЫ ДОЛГОСРОЧНОГО КОЛИЧЕСТВЕННОГО ПРОГНОЗА ПО ИНВАРИАНТАМ (ОДНОУРОВНЕВЫЕ)	203
4.4.1. Два способа увеличения времени упреждения прогнозов	203
4.4.2. Краткие сведения из теории инвариантов	204
4.4.3. Спектральный анализ экосистемы оз. Байкал для выделения гармонического тренда и поиска инвариантов	205
4.4.4. Анализ результатов и выбор числа гармоник тренда	208
4.4.5. Оптимальный шаг дискретизации оси времени для описания тренда при помощи безразмерных уравнений	211
4.4.6. Долгосрочный количественный прогноз базисных переменных по инварианту	214
4.5. ТИПОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗА	215
4.5.1. Последовательность операций для идентификации и краткосрочного прогноза	215
4.5.2. Последовательность операций для долгосрочного прогноза	216
Список литературы	219

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

T	— интервал наблюдения
P	— интервал упреждения прогноза ($P = T_y$)
P_t	— интервал квантования ($t, t + h$)
h	— шаг квантования
y_1'	— вектор выходных величин ($y_1, y_2, \dots, y_r$)
u_1'	— вектор входных воздействий ($u_1, u_2, \dots, u_m$)
s'	— вектор возмущений ($s_1, s_2, \dots, s_q$)
x'	— вектор состояний ($x_1, x_2, \dots, x_p$)
v	— обобщенная переменная
a	— вектор параметров
y^M	— выход модели
e	— отклонение модели ($e = y - y^M$)
T_k	— время (интеграл) корреляции
$R_v(k)$	— корреляционная функция
T_y	— время упреждения прогноза, где $RR > 1$
$\omega_{пр}$	— предельная частота
N	— полное множество наблюдений ($N = N_A \cup N_B \cup N_C$)
N_A, N_B, N_C	— множество точек соответственно обучающей, проверочной и экзаменационной выборки
n_A, n_B, n_C	— количество точек выборки соответственно обучающей, проверочной и экзаменационной
$\sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_N^2$	— среднеквадратичное отклонение на выборке соответственно обучающей, проверочной и всей
$\Delta^2(B)$	— критерий регулярности
$n_{см}^2$	— критерий минимума смещения (непротиворечивость)
$\Delta^2(C)$	— критерий точности краткосрочного прогноза [$\Delta^2(C) = RR$]
B_l	— критерий баланса переменных
$I^2(N)$	— критерий точности пошагового интегрирования разностного уравнения [$I^2(1)$ — на один шаг прогноза; $I^2(K)$ — на K шагов прогноза]

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга является результатом совместных исследований, выполненных в СССР и ГДР в 1977—1981 гг., в области разработки и применения новых методов математического моделирования сложных систем, называемых методами самоорганизации моделей. В ней отражены исследования, в которых принимали участие как авторы книги и руководимые ими научные коллективы, так и многие другие ученые — авторы научных статей, опубликованных в СССР и ГДР. Появление книги свидетельствует о плодотворности сотрудничества и глубоком взаимопонимании, достигнутом в процессе создания книги, и большой взаимной пользе научных контактов. Самоорганизация математических моделей по методу группового учета аргумента (МГУА) была предложена в конце шестидесятых годов в Институте кибернетики АН УССР [25]. Метод МГУА нашел применение как в Советском Союзе, так и за рубежом. В ГДР развитие теории и разработка алгоритмов и программ МГУА принадлежит Й. А. Мюллеру, особенно в области экономики. Литература по указанному новому методу моделирования имеется главным образом на украинском и русском языках. Это несколько ограничивает круг читателей, поэтому совместное издание данной книги на немецком и русском языках несомненно будет полезным для распространения метода.

Целью настоящей монографии является расширение круга лиц, исследующих сложные объекты для принятия решений об управлении и использующих при этом методы самоорганизации моделей (в первую очередь, — круга инженеров и экономистов). Они найдут в данной книге новые материалы с указанием наиболее важных источников информации для практического использования.

Одной из важнейших задач, стоящих перед кибернетикой, является моделирование сложных систем на основе наблюдения их взаимодействия с окружающим миром. Моделирование необходимо для того, чтобы узнать структуру и функции сложного объекта (задача идентификации) и определить соответствующие средства активного воздействия на него (задача управления) или, если мы не располагаем такими средствами в полной мере, чтобы узнать, что можно ожидать от данного объекта в будущем (задача прогнозирования или экстраполяции).

При долгосрочном прогнозе приходится сталкиваться с условиями, когда необходим учет возможных качественных изменений. Появление новых воздействий и помех, новых структур на интервале прогноза становится более вероятным, чем при краткосрочном прогнозе. Лишь в этом периоде времени вследствие динамики рассматриваемой системы вступают в силу принятые ранее решения по управлению и т. д. Однако задача долгосрочного прогноза не только значительно более трудна, чем задача идентификации и кратко-

срочного прогноза, но она более важна практически. Исследования долгосрочных последствий имеют большое значение, особенно в сложных экологических, экономических, социальных и других системах.

Интерес представляет не столько прогноз качественных показателей, сколько количественное (интервальное) прогнозирование процессов, при котором указываются уровни, достигаемые прогнозируемой величиной. Задача количественного прогноза при соответствующей сложности исследуемой системы является исключительно сложной и, как показывают результаты различных исследований, она до сих пор в достаточной степени не решена. Обычно оказывается, что для решения такой задачи только качественных представлений человека недостаточно.

Долгосрочные прогнозы, основанные на обработке мнений экспертов, на практике подтверждались далеко не всегда. Оказалось, что эксперты могут решать достаточно хорошо лишь сравнительно простые задачи краткосрочных и качественных долгосрочных прогнозов. Примером могут служить различия мнений экспертов о стратегии, пригодной для сохранения экологической системы оз. Байкал [14], а также о характере изменения климата Земли [8]. С ростом размерности и сложности структуры объекта одни лишь интуитивные подходы недостаточны.

Широко распространенный субъективный системный анализ и имитационное моделирование основаны на дедуктивном подходе и требуют глубокого изучения моделируемых объектов для развития теоретических представлений автора модели и накопления достаточного объема априорной информации. При этом уровень знаний об объекте моделирования должен быть настолько высоким, чтобы можно было составить достоверные математические уравнения, описывающие все элементы, и выбрать оптимальную область моделирования (число уравнений). К сожалению, мы не можем достичь такого уровня знаний во многих областях, в частности, в социологии, биологии, экологии и других науках о природе и обществе. Таким образом, при имитационных методах моделирования требуются глубокое изучение объекта моделирования и большой объем априорной информации при высоком ее качестве. Так, часто требуются данные при низком уровне помех, нормальное распределение отклонений, слишком большие выборки данных и т. п.

Методы самоорганизации математических моделей, представленные МГУА, в некоторой степени свободны от таких жестких требований, так как, будучи основаны на переборе вариантов по внешним критериям, они как бы предоставляют право самой вычислительной машине найти требуемую информацию на основе обработки имеющихся (часто весьма коротких) выборок данных. Особенность МГУА состоит в том, что этот индуктивный метод обеспечивает объективный характер выбора модели или системы моделей. Автору модели

при этом достаточно указать только, каким внешним критериям и какой последовательности их применения должна удовлетворять модель. Многокритериальный выбор модели (или применение некоторого комбинированного критерия) необходим для регуляризации, т. е. для однозначности выбора и повышения его помехоустойчивости. В целом МГУА решает задачу помехоустойчивого объективного выбора модели оптимальной сложности при помощи перебора вариантов по заданному ансамблю (или иерархии) внешних критериев, указываемых автором модели.

Положение в науке о моделировании нельзя признать удовлетворительным: нетривиальных моделей познавательного типа мало, а моделей для долгосрочного прогноза просто нет. Метод математических моделей используется в экономике уже почти сто лет, но он не сыграл сколько-нибудь значительной роли в экономических исследованиях [58]. То же можно сказать и о многих других направлениях науки. В условиях, когда жизнь ставит перед нами все более сложные задачи моделирования, нужно развивать и объединять все имеющиеся методы моделирования в единый комбинированный метод, не забывая и возможностей МГУА.

При этом не следует делать слишком поспешных выводов о непригодности того или иного метода по одной или двум попыткам его применения. Практика показывает, что такие меры, как выбор алгоритма МГУА, расширение исходного множества переменных, предлагаемых машине (в частности, использование приращений и сумм), перебор множества опорных функций и классов уравнений, как правило, всегда позволяют получать достаточно точные результаты. Зная общие приемы, с помощью МГУА всегда нужно экспериментировать.

Методы самоорганизации позволяют получить модели, на которых можно смело экспериментировать (что не всегда возможно на реальном объекте), и тем самым осуществить объективный (не зависящий от представлений автора) системный анализ и идентификацию сложных объектов, способствуя образованию правильного общественного понимания существа происходящих процессов.

Дальнейшее развитие теории, методов и алгоритмов самоорганизации моделей позволит получить точные долгосрочные количественные прогнозы для экономики, метеорологии, климатологии, гидрологии, экологии и других важных областей науки и производства.

Авторы книги надеются, что методы самоорганизации найдут широкое применение для решения разнообразных задач.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252601, Киев, 1, Крещатик, 5, издательство «Техніка».

1.1. ПРОГНОЗ И МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

1.1.1. ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Прогнозирование представляет собой научно обоснованное оценивание будущих состояний интересующего нас объекта. Прогноз должен показать, когда и в какой последовательности будет протекать смена состояний объекта и как состояние объекта будет влиять на выполнение задач, для которых данный объект предназначен.

Прогнозирование является неотъемлемой стороной всякой научной деятельности. Для математического описания объекта используются сведения из различных отраслей науки в виде тех или иных закономерностей. При этом в соответствии с задачей, поставленной перед объектом, приходится абстрагироваться от его несущественных свойств. Так, при моделировании колебаний маятника нет необходимости учитывать его стоимость или окраску и др. Все существенные свойства и взаимосвязи используются для познания объекта и прогнозирования происходящих в нем процессов. Некоторые нерегулярные влияния внешней среды на объект рассматриваются как случайные воздействия.

Еще более существенными, определяющими качественный ход процесса, являются внешние возмущающие воздействия (в том числе управляющие воздействия, изменяемые в процессе управления). При прогнозе нужно знать изменение внешних возмущающих воздействий, чтобы получать так называемый *нормативный прогноз*. Ряд таких прогнозов по принципу «если-то» иногда называют *сценариями* будущего, и экспертам предлагается выбрать тот из сценариев, который в большей степени удовлетворяет задаче, поставленной перед объектом. Проще всего получать прогнозы, исходя из предположения о том, что все будет идти так, как было до сих пор (гипотеза сохранения статус-кво). Нормативные прогнозы часто принимают вид нормативных сценариев, каждый из которых отвечает одному из вариантов изменения управляющих и возмущающих воздействий.

Без проигрывания сценариев возможна только слепая тактика управления объектом на авось, недопустимая в наш век ЭВМ и быстрого научно-технического прогресса. Результатом такой тактики было бы зигзагообразное движение объекта из одного затруднительного состояния в другое.

1.1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В зависимости от области применения научно-технического прогноза имеется много его определений:

1. Это прогноз будущих изобретений, технических характеристик и функциональных возможностей машин и приборов, которые служат общественно-полезным целям.

2. Это вероятностный прогноз будущих технических характеристик, форм и параметров, который основывается на анализе количественных соотношений и логике, но не на интуитивном понимании сущности объекта.

3. Это прогноз, с определенной достоверностью, научно-технических свойств для заданного интервала времени.

4. Это оценка вероятности возможных путей и достижений развития науки и техники, а также оценка необходимых для их достижения ресурсов и организационных мероприятий.

5. Это оценка будущих технологических изменений, которые наступят с высокой вероятностью.

6. Это достаточно определенное высказывание о будущем, которое обычно установится при условии неизменных окружающих условий или их медленного изменения (например, при отсутствии войны и депрессий).

7. Это научно обоснованное рассмотрение вероятного состояния объекта на фиксированном интервале будущего или возможных путей достижения этого состояния, которое было сформулировано как определенная цель при соблюдении потребностей общества.

8. Это образец будущего, который всегда предшествует планированию, т. е. выбор главной цели и ее развертывание в иерархию целей и задач. Прогноз лежит в основе новообразования будущих ситуаций. Из прогноза определяется значимость состояния системы или обстановки, откуда вырисовывается цель деятельности.

Как видно из этих определений, существенными категориями понятия прогноз являются — время, цель, структура, окружающий мир, ресурсы, т. е. категории, принятые в теории автоматического управления. Поэтому прогнозируемая величина y в общем случае может быть представлена как переменная состояния или выходная величина некоторой системы управления, на вход которой подаются соответствующие входные и управляющие величины u и которая находится под действием соответствующих помех s (рис. 1.1). Исследуемые объекты являются в общем случае динамическими и стохастическими управляемыми системами. При этом задача прогноза формули-

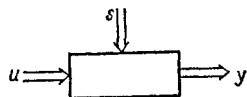


Рис 1.1 Схема объекта управления, аналогичная прогнозирующей модели

руется следующим образом: дана динамическая система (или объект исследования), находящаяся под действием случайных воздействий. В результате наблюдения получается выборка реализаций $y_t, t \in N$ и $u_t, t \in N$. О структуре системы имеется лишь априорная информация общего характера. Ищется модель, дающая возможность прогнозировать выходную величину y_t на интервале упреждения прогноза $t \in P$ (далее совокупность реализаций y_t, u_t и $t \in N$ называется точками таблицы наблюдения).

Если интервал упреждения прогноза небольшой, то для него требуется модель, отражающая механизм объекта (физическая модель). Если же ставится задача долгосрочного прогноза, то требуется более простая нефизическая модель.

1.1.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ТЕРМИНАХ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

В общей теории связи изучаются системы, состоящие из источника истинного сигнала, кодирующего устройства, линии связи, подверженной действию помех, декодирующего устройства и приемника [32], [37]. Сигнал соответствует выходной величине точной физической модели объекта, кодирующее устройство — системе планирования эксперимента. Зашумленный сигнал, получаемый в конце линии связи, соответствует зашумленной выборке экспериментальных данных. Декодирующее устройство отвечает модели (рис. 1.1) или многим другим способам обработки данных, получивших название обратных преобразований, в результате которых получается как интерполяция данных, так и прогноз процессов на ближайшее будущее (рис. 1.2).

Прямым преобразованием (по аналогии с термином, принятым в операторном исчислении) будем называть получение различных вероятностных и других математических характеристик процесса по данным его наблюдения, т. е. на интервале интерполяции. Так, построения математической модели любого вида, корреляционной функции, характеристики спектральной плотности, графа (матрицы) числа переходов могут служить примерами прямого преобразования «Прогнозирование без модели» относится к любому из перечисленных выше прямых преобразований, при котором нет этапа моделирования объекта (рис. 1.2). Для всех вероятностных характеристик процесса такое прогнозирование приводит к многозначному решению. Для достижения однозначности (существующей, например, при использовании операторного изображения Фурье или Лапласа) вероятностных характеристик требуется дополнительная информация или внешнее регуляризирующее воздействие. Наиболее необременительным для автора прогноза является допущение устойчивости вероятностных или других математических характеристик, которое можно сформу-

лизовать так: характеристика (модель, корреляционная функция, спектр, граф числа переходов и др.), полученная по данным наблюдений на интервале интерполяции, остается неизменной и на интервале прогноза. Как известно, при прогнозировании, основанном на построении моделей, используются условия устойчивости модели. Использование устойчивости других характеристик вместо модели не менее обоснованно.

Обратным преобразованием (по аналогии с термином, принятым в операторном исчислении) будем называть получение исходной реализации процесса по его математической (чаще всего вероятност-

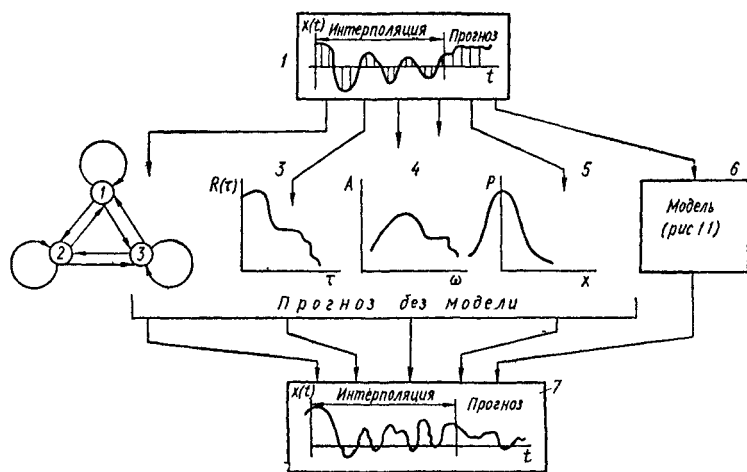


Рис. 1.2. Прямые и обратные преобразования:

1 — исходная реализация процесса, 2 — граф вероятностей переходов, 3 — автокорреляционная функция, 4 — спектральная характеристика, 5 — плотность распределения вероятности; 6 — модель, получаемая по полиномиальным алгоритмам М1 УА, 7 — восстановленная реализация и прогноз

ной) характеристике с использованием указанного регуляризующего условия устойчивости, необходимого для получения однозначного решения. При помощи обратного преобразования можно решать задачу восстановления исходной реализации как на интервале интерполяции, так и на интервале, включающем в себя новую точку — исковую ординату прогноза (рис. 1.2).

Регуляризация решений. Условие устойчивости вероятностных характеристик, дополненное критерием минимума наименьших квадратов ошибки, обеспечивает не только единственность решения, но и нечувствительность прогноза к малым изменениям входных данных [77].

1.1.3.1. Обратное преобразование по условию устойчивости корреляционной функции. Непрерывная корреляционная функция на бесконечном интервале наблюдения процесса определяется интегра-

лом вида

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t - \tau) dt.$$

На практике приходится пользоваться только оценкой корреляционной функции на заданном интервале времени (от $t = -T$ до $t = +T$):

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t - \tau) dt.$$

При переходе к дискретному отсчету времени интервал заменяется суммой, а функция измеряется через равные интервалы (шаги) времени $\Delta t = h = 1$. При этом получаем дискретную оценку ординат корреляционной функции

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \sum_{i=-T}^{+T} x_i x_{i-\tau},$$

где x_i — текущая ордината процесса.

0	1	4
0	2	0
1		
2		
3		
4		

Рис. примера №1.

Пример 1. Краткосрочный (одноуровневый) прогноз по критерию устойчивости корреляционной функции. Рассмотрим для конкретности интервал измерения переменной $x(t)$, содержащий пять ординат x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . На этом интервале могут быть рассчитаны ординаты оценки корреляционной функции *, т. е. выполнено прямое преобразование по следующим формулам:

$$k_0 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)/5; \quad k_1 = (x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4)/4;$$

$$k_2 = (x_0 x_2 + x_2 x_1 + x_3 x_4)/3; \quad k_3 = (x_0 x_3 + x_4 x_1)/2;$$

$$k_4 = 1 (x_0 x_4).$$

Аналогичные уравнения можно составить для интервала, также содержащего пять ординат — x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , но включающего в себя прогнозируемые значения переменной $x = x_5$ (при прогнозе с упреждением на один шаг):

$$\hat{k}_0 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)/5; \quad \hat{k}_1 = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5)/4;$$

$$\hat{k}_2 = (x_1 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5)/3; \quad \hat{k}_3 = (x_1 x_4 + x_5 x_2)/2; \quad \hat{k}_4 = 1 (x_1 x_5).$$

Далее используем критерий устойчивости, утверждающий, что корреляционная функция для обоих интервалов одинакова: $k_0 = \hat{k}_0; k_1 = \hat{k}_1; k_2 = \hat{k}_2; k_3 = \hat{k}_3; k_4 = \hat{k}_4$.

В результате получаем пять уравнений для определения прогноза x_5 : $x_5(0) = x_0; x_5(1) = x_0 x_1 / x_4; x_5(2) = x_0 x_2 / x_3; x_5(3) = x_0 x_3 / x_2; x_5(4) = x_0 x_4 / x_1$.

Каждое уравнение является условием совпадения указанных двух корреляционных функций при сдвигах $\tau = 0, 1, 2, 3$ и 5 соответственно. Потребуем, чтобы среднеквадратичная ошибка расхождения корреляционных функций во всех указанных точках была бы минимальной. Для этого следует рассматривать полученные

* Оценки получены по формуле

$$k_\tau = \frac{1}{T+1-\tau} \sum_{i=\tau}^T x_i x_{i-\tau}$$

уравнения как систему условных уравнений Гаусса. Переходя к системе нормальных уравнений и решая ее, получаем одношаговый прогноз:

$$x_5 = x_0 (1 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_3 x_2 + x_4 x_1) / (1 + x_4^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_1^2).$$

Это решение будем называть сверткой условных прогнозов

На основании приведенного примера можно сделать основной вывод о том, что обратное преобразование дискретной оценки корреляционной функции по критерию ее устойчивости, используемое для одношагового прогноза, реализуется просто, при помощи решения линейных уравнений.

Однако известно, что точность определения дискретной оценки корреляционной функции быстро падает с уменьшением числа слагаемых в формуле ее расчета. Поэтому в свертке ординат одномерной корреляционной функции достаточно учитывать приблизительно около половины ординат — с индексом от 0 до $T/2$. В свертке двухмерной функции следует учесть около четверти ординат. В рассматриваемом примере получим укороченные свертки в виде:

$$x_5 = x_0 (1 + x_1 x_4 + x_2 x_3) / (1 + x_4^2 + x_3^2).$$

В таком виде формула пригодна для краткосрочного прогноза с упреждением на один—три шага. Разнообразие прогнозов получают, изменяя число и состав множества ординат, учитываемых в свертке. Такое разнообразие («веер») прогнозов необходимо для оптимального прогноза по внешним критериям или при помощи методов экспертной оценки.

*Другой вид свертки условных прогнозов.** Точность прогнозов по приведенной выше формуле сильно зависит от неточности измерения координаты x_0 и выбора длины учитываемой предыстории. Формула имеет преимущество для задач с начальным условием, т. е. в случае, когда ордината x_0 задана точно. Часто более точные результаты получаем при другом способе свертки. Составим уравнения невязок:

$$\Delta_1 = \hat{k}_1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2)/5;$$

$$\Delta_2 = \hat{k}_2 - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5)/4;$$

$$\Delta_3 = \hat{k}_3 - (x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5)/3;$$

$$\Delta_4 = \hat{k}_4 - (x_1 x_4 + x_2 x_5)/2;$$

$$\Delta_5 = \hat{k}_5 - x_1 x_5.$$

Сумма невязок $\Delta_\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2$. Дифференцируя ее по искомому прогнозу x_5 $\partial \Delta_\Sigma^2 / \partial x_5 = 0$, находим прогноз, наилучшим образом минимизирующий сумму невязок.

* Второй способ предложен Т. И. Строковой.

В результате получаем кубическое уравнение $x_5^3 + ax_5 = 0$, называемое «корреляционной моделью стандартной структуры», решение которого позволяет найти оценку искомого прогноза x_5 . На следующем шаге решение уравнения повторяется.

1.1.3.2. Обратное преобразование по критерию устойчивости матрицы числа переходов. При построении графа или матрицы график изменения функции заменяется ступенчатой кривой: функция принимает только ряд заданных значений (уровней), образующих полосы дискретизации.

Согласно теореме Уидроу [65], наименьшая потеря информации от дискретизации соответствует такому выбору ширины полос, при котором в каждой из них будет содержаться равное число экспериментальных точек. Число уровней выбирается произвольно, но так, чтобы в каждой полосе было не менее 5—10 точек (правило метрологии). Устойчивость графа (матрицы) числа переходов выражается в том, что указанное равенство числа точек в каждой полосе дискретизации сохраняется не только на интервале измерений (интерполяции), но и на интервале прогноза. Это достигается адаптацией матрицы при помощи обратной связи.

Обратная связь для адаптации графа. По условию устойчивости среднего числа переходов процесса с одного уровня дискретизации на другой требуется вводить обратную связь. Если, например, за 100 шагов наблюдения было установлено 10 переходов с первого уровня на второй, то столько же таких переходов должно быть и в прогнозе на 100 шагов вперед. Это означает, что матрица (или граф) числа переходов с каждым очередным шагом прогноза должны корректироваться при помощи обратной связи с тем, чтобы к концу прогноза разность матриц наблюдений и прогнозов равнялась нулю. После каждого шага прогноза использованный переход вычитается из числа переходов в матрице наблюдений: $\Delta_{n+1} = \Delta_n - \Delta_{пр}$.

Критерий баланса. Одновременно выполняются по указанному алгоритму два прогноза, отличающихся по числу уровней дискретизации выходной величины (например, на два и на шесть уровней). Чем меньше число уровней, тем больше заблаговременность прогноза. Согласование прогнозов по критерию баланса позволяет увеличить время упреждения прогноза с большим числом уровней до времени упреждения прогноза с малым числом уровней. Для согласования используется перебор пар прогнозов.

Выбирается лучшая пара, оптимальная по критерию баланса во времени. Например, если при двух уровнях выбрано три прогноза, а при шести уровнях — пять прогнозов, то значение критерия баланса (по уровню) рассчитывается для 15 комбинаций. Из них выбирается одна пара прогнозов, лучшая по критерию.

Комбинированный критерий баланса. По другому критерию баланса требуется, чтобы прогнозы, полученные на одной части наблюдаемого объекта, лучше всего соответствовали прогнозам, по-

лученным на другой его части. Сопряжение (свертка) временного и пространственного критерия баланса является наиболее эффективным.

1.1.3.3. Роль человека — автора прогноза в алгоритмах обратного преобразования. Обратное преобразование является объективным методом прогноза, так как не оставляет места для непосредственного вмешательства человека в ход вычислений. Диалог с ЭВМ на конкретном уровне языка общения не допускается. На результат прогноза можно влиять только при помощи изменения критериев селекции, которые должны быть согласованы с экспертами. Объективный характер МГУА определяется тем, что эксперты назначают только общие критерии выбора и в остальном в самоорганизацию модели не вмешиваются. В случае разногласия эксперты могут перейти на более высокий уровень критериев (предельная помехоустойчивость, заблаговременность прогнозов, время счета на машине и др.), где споры быстро разрешаются. По МГУА решаются задачи объективного системного анализа, нелинейной идентификации и, главное, долгосрочного количественного прогноза процессов по критерию баланса прогнозов.

Объективное обратное преобразование разработано пока только для задач прогнозирования. Необходима дальнейшая разработка методов перехода от одной характеристики к другой, что необходимо для решения более широкого круга задач. Например, по корреляционной функции исходной реализации можно найти ее операторное изображение и, следовательно, решить задачу идентификации.

Следует указать на коренное отличие существующих вероятностных методов прогноза и обратного преобразования. Вероятностные методы прогнозирования не дают конкретных цифр, а только указывают вероятность тех или иных значений интересующих нас переменных. Другими словами, при их помощи нельзя решать задачи обратного преобразования от вероятностных характеристик к цифрам количественного прогноза. Это предоставляется сделать человеку — заказчику прогноза. В то же время при наличии дополнительного внешнего критерия, дающего информацию о фазе исходной реализации случайного процесса и тем самым регулизирующего задачу обратного преобразования, последнее становится возможным и однозначным. По матрице числа переходов, спектру или корреляционным функциям удастся восстановить исходную реализацию случайного процесса и его количественный прогноз. Заметим, что для решения многофакторных задач преимущество получает обратное преобразование корреляционных функций. Методы, использующие матрицы числа переходов и гармонический алгоритм МГУА, удобны только для решения однофакторных (скалярных) задач моделирования (т. е. задач, где в каждой точке поля задано значение только одной величины или фактора).

1.1.4. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ ПРОГНОЗЫ

Количественным (или интервальным) принято называть прогноз, указывающий значения уровней прогнозируемой переменной с точностью до $\pm 10\%$ на всем интервале времени упреждения прогноза. *Качественный* прогноз не претендует на такую точность: он характеризует процесс на вероятностном или, главным образом, на словесном уровне (похолодает, потеплеет и др.).

Различают методы, предназначенные для количественного (точного) и качественного (нечеткого) прогнозов. Лучше всего точному прогнозу поддаются детерминированные механические системы, не подверженные заметным влияниям внешних воздействий. Например, движение планет Солнечной системы можно рассчитать на длительное время вперед. Точный расчет невозможен для системы с участием людей, т. е. для процессов целенаправленного действия. Здесь на помощь, как указывалось, приходит аппарат *нормативного прогнозирования*, рассматривающий прогнозы при заданном изменении управляющего воздействия в будущем в виде ряда сценариев. Основной задачей таких сценариев, очевидно, является не количественная информация. Сценарии, скорее, позволяют найти моменты времени, в которых открываются критические возможности выбора варианта управления.

Чаще всего на практике требуются прогнозы случайных процессов, имеющих значительную детерминированную составляющую (тренд процесса). Именно для таких процессов применяются алгоритмы МГУА, рассматриваемые в данной книге. Необходимы достаточно точные количественные прогнозы для суждения о будущем системы и принятия решений. Отсутствие долгосрочных количественных прогнозов еще не означает принципиальной невозможности получения таких прогнозов, а часто связано с недостаточным объемом усилий, затраченных на разработку алгоритма прогнозирования. В результате количественного прогноза указывается интервал (уровень) значений интересующих нас переменных в будущем. Потому количественные прогнозы часто являются интервальными. При самоорганизации долгосрочного количественного интервального прогноза проигрывание ряда сценариев будущего остается в силе, так как в прогнозирующих моделях в качестве аргументов содержится ряд внешних и управляющих воздействий. Ход прогнозов зависит от того, какое управление выберем в будущем, что при многомерности задачи требует построения ряда вариантов (сценариев) нормативного прогноза.

1.1.5. КРАТКОСРОЧНЫЙ И ДОЛГОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗЫ

Заблаговременность или *время упреждения прогноза* определяют его название. Существует несколько определений. Иногда краткосрочным называют прогноз на 1—2 года (или шага) вперед. В дру-

гих случаях краткосрочными называют прогнозы, у которых время упреждения составляет 10—20 % от продолжительности наблюдения объекта. Прогноз называется долгосрочным, если время упреждения превышает 10 лет (шагов квантования) и равно или превышает время наблюдения.

Для стационарных процессов время упреждения сравнивают с временем корреляции. Время упреждения не может превышать время корреляции T_k . При этом под временем корреляции стационарного стохастического процесса y_t с монотонно падающей корреляционной функцией $R_y(\tau)$ понимается время, начиная с которого эта функция (или ее огибающая) отклоняется от нуля не более чем на 5 %. Это означает, что процессы типа белого шума ($T_k^* = 0$) нельзя прогнозировать, в то время как детерминированные процессы [например, точные синусоидальные колебания ($T_k = \infty$)] поддаются прогнозу на произвольно длительный интервал.

Ввиду однозначной связи между корреляционной функцией и функцией спектральной плотности случайного процесса можно задать граничную частоту $\omega_{пр}$, адекватную времени корреляции. Очевидно, краткосрочный прогноз учитывает только высшие гармоники, а долгосрочный — только гармоники низких и ультранизких частот. Поэтому прогнозирующие модели оптимальной сложности (выбираемые по МГУА) для долгосрочного и краткосрочного прогноза различны. Модели для идентификации характеристик объекта и краткосрочного прогноза совпадают и при малом уровне помех обычно являются *физическими моделями*, т. е. соответствуют механизму действия объекта. Такие модели совершенно не пригодны для долгосрочного прогноза, для которого лучшими оказываются *нефизические, аппроксимирующие модели*, о чем будет сказано подробнее ниже.

1.1.6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

При экспериментальных методах прогнозирования, к которым относятся методы самоорганизации, предполагается, что все основные тенденции развития процесса отражены в таблице наблюдений. Применению экспериментальных методов благоприятствует существенная инерционность процессов. Использование их в случаях, когда тенденция или основные направления процесса непредсказуемы, неэффективно.

С помощью экспериментальных методов решают задачу прогнозирования на основе информации о прошлом и дают прогнозы, которые только тогда совпадают с фактическим ходом процесса в будущем, когда не возникает никаких принципиальных (структурных) изменений в объекте исследования и внешние влияющие факторы изменяются в тех же границах, что и в прошлом. В этом случае математическая модель, полученная на основании информации о прошлом, остается информативной и на всем интервале прогнозирования.

1.1.7. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Целью исследования в естественных науках является надежный прогноз результатов экспериментов и наблюдений. Естественные науки уже давно могут, например, предсказывать движение небесных тел, пользуясь детерминистическими моделями. Подобные успехи в прогнозировании могут быть достигнуты и для величин, значения которых усреднены по большим интервалам времени или по большим пространствам земной поверхности. Поэтому нетрудно прогнозировать среднюю температуру Земли или среднее количество осадков на части земной поверхности на протяжении большого временного интервала. Значительно труднее получить прогноз температуры в заданной точке поверхности или на заданном коротком интервале времени.

Важной задачей при разведке мест залегания нефти и газа, например, является определение структуры и глубины пластов, отражающих сейсмические волны. Необходимые для этого затраты могут быть существенно сокращены, если есть возможность по данным сейсмических наблюдений соседних участков экстраполировать геологический профиль на заданном трудно проходимом участке [44].

Примеры решения задач прогнозирования для отдельных областей науки и техники дают представление о многообразии возможных постановок задачи. Одновременно они служат примерами задач, для решения которых применяются алгоритмы МГУА, рассматриваемые ниже в гл. 3 и 4.

В данном разделе приводятся только начальные части примеров, поясняющие практически существующую постановку задач прогнозирования. Ниже, в последующих разделах, примеры будут продолжены.

Пример 2. Прогноз давления и температуры воздуха. Даны среднесуточные значения температуры воздуха в Ленинграде с 1901 по 1967 гг. Необходимо по этому временному ряду получить долгосрочный прогноз. Необходимо также по средним дневным значениям давления и температуры воздуха в г. Свердловске и в выбранных пунктах СССР с 11 по 20 марта 1977 г. получить прогноз температуры и давления воздуха с 21 по 27 марта 1977 г. [37].

Пример 3. Прогноз урожайности сельскохозяйственных культур [24]. Получение запланированных урожаев сельскохозяйственных культур требует существенных усилий по выбору сортов, соответствующих климатическим условиям, качеству почвы, типа ирригационной системы и последовательности чередования сельскохозяйственных культур для получения максимальных урожаев при данных удобрениях, а также по оперативному управлению системой. Урожайность сельскохозяйственных культур определяется природными факторами, климатом, качеством земли, данные о которых могут быть получены от соответствующих сельскохозяйственных опытных станций.

Пример 4. Прогноз динамики роста стебля яровой пшеницы [24]. Для определения динамики роста одного сорта яровой пшеницы были проведены исследования четырех режимов орошения (1 — без орошения, 2—60 %, 3—70 %, 4—80 %) и трех вариантов внесения минеральных удобрений:

Вариант	Азот, кг/га	Фосфор, кг/га	Калий, кг/га
1	0	0	0
2	80	70	30
3	158	146	60

Переменные состояния роста: x_1 — биомасса части растений, расположенной над землей, кг/м²; x_2 — биомасса корней, кг/м²; x_3 — средняя высота, м; x_4 — поверхность зеленых листьев, м². Внешними воздействиями являются следующие переменные: u_1 — влажность земли, %; u_2 — солнечная радиация, Вт/м²; u_3 — температура, °C.

Пример 5. Прогноз урожая пшеницы [87]. По экспериментальным данным за 1967—1975 гг. двух опытных станций в СССР нужно найти прогноз урожая пшеницы для различных стратегий внесения удобрения и полива в зависимости от различных климатических и биологических условий по следующим переменным: урожайность y ; испарение влаги u_1 , u_2 ; число солнечных часов u_3 ; длительность пятой фазы u_4 ; время посева u_5 ; площадь зеленых листьев u_6 ; прирост биомассы в начале и в конце пятой фазы u_7 .

Пример 6. Прогноз уборки сена в Якутии [52]. В центральной Якутии климатические условия таковы, что количество осадков, температура и ночные заморозки в вегетационный период являются решающими для роста растений. Для одной из областей Якутской АССР в 1941—1945 гг. были получены следующие величины, влияющие на сеноуборку, ц/га: u_2 , u_3 , u_4 , u_5 — количество осадков соответственно в сентябре — апреле, июне, июле и мае — августе; u_6 — гидротехнический коэффициент (отношение количества осадков к числу дней с температурой выше 10 °C); u_7 , u_8 , u_9 , u_{10} — число дней в году с температурой соответственно выше 10 °C; u_{11} , u_{12} — абсолютный минимум температуры соответственно в мае и июне; u_{13} — коэффициент влажности. Требуется прогнозировать количество биомассы, пригодной для сена, с временем упреждения прогноза от одного до трех месяцев [52].

1.1.8. ТРЕБУЕМАЯ АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Для получения научно обоснованного прогноза, наряду с кибернетическими методами, применяемыми на соответствующем уровне абстрагирования, часто необходим учет сведений из социальных и естественных наук.

Например, в модели производственной деятельности предприятия следует учитывать возможность приобретения новых установок, потребность в материалах, емкости складов, запуск в производство новой продукции, имеющейся в распоряжении рабочей силы, а также учитывать рабочее время, сбыт готовой продукции, положение с кадрами, погодные условия, сезонные влияния, развитие производственных мощностей, заболеваемости и др.

Различные подходы к прогнозу отличаются по объему необходимой для прогноза априорной информации об исследуемом объекте, об измеряемых и неизмеряемых характеристиках, о состоянии и изменении его окружения.

При *детерминистическом подходе* предполагается, что вся информация имеется уже априори или может быть получена с достаточной точностью.

Стохастический подход учитывает влияние мешающих факторов и шума, причем интересующие нас характеристики рассматриваются как случайные величины, вероятностные параметры которых получают с помощью выборочных реализаций.

Как детерминистический, так и стохастический подход предполагает наличие в таблице исходных данных полного информационного

базиса: все значительные факторы должны быть учтены. Точность измерения факторов должна быть достаточно высокой.

Подход самоорганизации коренным образом отличается от указанных подходов: объем априорной информации минимальный и возможно построение моделей без учета ряда существенных факторов в условиях, когда помеха в несколько раз превышает полезный сигнал. Так, урожай пшеницы, зависящий от 50 существенных факторов, удастся прогнозировать при помощи частных моделей, учитывающих всего два-три фактора [86, 87]. Это объясняется тем, что в сложных объектах факторы коррелированы между собой и каждый из них может выражать влияние целой группы факторов. Самоорганизация интересна тем, что эти связи факторов используются при переборе, несмотря на то что они остаются неизвестными. Методологической основой применения самоорганизации для моделирования (т. е. самоорганизующегося моделирования) является допущение о том, что вся информация об изменяющихся воздействиях между существенными переменными моделируемой системы, т. е. о структуре и функции системы, содержится в небольшой таблице наблюдений объекта моделирования, называемой выборкой данных, и в заданных критериях выбора модели. Поэтому самоорганизацию прежде всего можно рассматривать как метод всемерного уменьшения априорной информации об объекте. При самоорганизации конструктор модели лишь указывает множество (ансамбль) внешних критериев выбора модели, которые необходимы для выбора модели оптимальной сложности. Самоорганизация математических моделей решает эту задачу без априорного указания закономерностей исследуемого объекта, что применяется, например, в математической физике.

1.2. ЭВРИСТИЧЕСКАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ

Для сложных систем, о которых имеется лишь малая априорная информация, эффективна эвристическая самоорганизация математических моделей, разработанная в Институте кибернетики АН УССР. Методика успешно применяется и развивается во многих странах (например, в ГДР, НРБ, ВНР, Англии, США, Японии и др.) [50, 97—112]. Во всех случаях это связано с применением современных ЭВМ.

По имеющимся выборкам влияющих факторов и интересующих нас выходных переменных системы на ЭВМ генерируется большое число моделей и по соответствующим критериям селекции выбирается так называемая модель оптимальной сложности. Перед лицом, строящим модель (называемым модельером), стоит задача рациональной организации перебора, причем ЭВМ задаются критерии селекции, возможные классы опорных функций и алгоритм генерирования моделей-претендентов.

Необходимыми условиями самоорганизации являются: исходная таблица данных наблюдений, называемая выборкой; закон постепенного усложнения структуры моделей и предписание для получения моделей-претендентов различной сложности в рамках класса заданных опорных функций; пороговый отбор: эвристические критерии селекции, определяющие цель построения модели.

Эти условия определяют минимум априорной информации, необходимой для осуществления самоорганизации модели на ЭВМ при помощи перебора множества моделей-претендентов по заданному ансамблю внешних критериев выбора единственной модели оптимальной сложности. Обратим внимание на необходимость априорного выбора множества входных переменных, опорных функций и правил постепенного усложнения вариантов модели, а также выбора критериев селекции в соответствии с поставленной задачей моделирования.

Обычно стремятся осуществлять указанные выборы на основе надежной априорной информации. Множество входных переменных включает в себя все переменные, которые обычно используются специалистами данной отрасли науки. Например, экономисты знают список переменных, применяемых при исследовании того или иного экономического объекта. Биологи из года в год измеряют переменные с определенным шагом дискретизации оси времени (например, раз в месяц или раз в сезон). Алгоритмы МГУА позволяют оставить в таком списке переменных только те, которые обеспечивают минимум критериев.

Множество используемых опорных (базисных) функций невелико. В этом легко убедиться, если выписать все опубликованные в последние годы прогнозирующие уравнения. Можно организовать перебор ряда опорных функций и выбрать ту, которая обеспечивает более глубокий минимум критериев селекции модели. Практически «побеждают» алгебраические полиномиальные модели, линейные и нелинейные и дифференциальные линейные уравнения, заменяемые их конечно-разностными аналогами. Только в редких случаях требуется применение нелинейных разностных уравнений.

Основными критериями МГУА являются критерий минимума смешения и различные критерии баланса (включая инварианты). Однако, как это будет показано во второй главе, эти критерии дают многозначный выбор (т. е. указывают несколько моделей) и чувствительны к помехам. Здесь открывается возможность применения *теории регуляризации решений некорректных задач*, разработанной А. Н. Тихоновым для подобных случаев [77]. В соответствии с этой теорией основные критерии МГУА всегда следует применять совместно с некоторыми вспомогательными или регуляризирующими критериями, что обеспечивает однозначность выбора модели оптимальной сложности и нечувствительность к помехам. Это поясняет, почему в МГУА всегда рекомендуется выбор модели на плоскости двух критериев.

1.3. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕРМИНА «САМООРГАНИЗАЦИЯ»

В данной книге рассматриваются алгоритмы самоорганизации моделей для целей идентификации объекта и долгосрочного прогнозирования изменений его выходных переменных. Однако термин «самоорганизация» часто используется совсем в другом смысле. Приведем некоторые другие определения понятия самоорганизации.

Самоорганизация рассматривается как метод адаптивного синтеза (адаптации) сложных систем. Если априорная неопределенность относится лишь к параметрам системы при постоянной (например, заданной структуре), то тогда можно применять известные алгоритмы параметрической адаптации и обучения [88]. Если же неопределенной является и структура, то тогда требуются алгоритмы самоорганизации для структурной идентификации.

Под самоорганизацией можно понимать спонтанное возникновение организации в автономной замкнутой системе [10]. Для самоорганизации необходимо выполнение следующих трех условий [67]:

1) существует исходная организация (множество опорных функций);

2) имеется механизм для случайных изменений (мутаций) этой организации (множество моделей-претендентов);

3) имеется механизм выбора, с помощью которого эти мутации могут быть оценены с точки зрения их полезности для улучшения организации (алгоритм самоорганизации).

Процесс самоорганизации связан с уменьшением энтропии. В этом смысле принципы самоорганизации являются предметом обширных исследований.

В новой науке, называемой *синергетикой*, под самоорганизацией в широком смысле понимают процесс спонтанного роста порядка или организованности в системе, состоящей из многих элементов и находящейся под влиянием воздействий окружающей среды.

Самоорганизация (выбор) модели оптимальной сложности из множества моделей-претендентов математически выражается в уменьшении энтропии и росте информации — величины, служащей в качестве меры порядка и организации и обратной энтропии. Такой подход перекликается с распространенным в физике определением: понятие самоорганизации тесно связано с порядком, который, в свою очередь, связан с понятием энтропии [64]. Очевидно, еще слишком рано говорить об общей теории самоорганизации; теория самоорганизации моделей изучает несколько структур алгоритмов самоорганизации математических моделей, которые подробно будут рассмотрены в гл. 2.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ

2.1. САМООРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1.1. ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Применение метода самоорганизации математических моделей при помощи ЭВМ не ограничивается прогнозирующими моделями. Метод представляет собой универсальный подход к решению: 1) задачи интерполяции и краткосрочного прогноза; 2) задачи долгосрочного прогнозирования; 3) задачи распознавания образов.

Постановка задачи идентификации. Дана система, где u — входной вектор, а y — выходная величина. В результате наблюдений располагаем выборкой с ограниченным объемом реализаций входных величин u_t и выходной величины y_t , $t \in N$. Ищется математическое описание типа «вход-выход», которое для общего случая получается в виде следующего функционального преобразования: $y(t) = F(u(t))$, $t_0 \leq t < t_1$. В качестве меры совпадения выхода модели y_t^M и наблюдаемого выхода y_t служит критерий качества $Q(y_t, y_t^M)$. Пользуясь рядом Вольтерра для динамической системы, получаем его дискретный аналог в виде полинома Колмогорова—Габо́ра:

$$y_t^M = a_0 + \sum_{i=0}^{n_1} a_i x_{it} + \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} x_{it} A_{ij} x_{jt} + \dots, \quad (2.1)$$

где $x_{it} = u(t - i)$.

По наблюдениям (u_t, y_t) можно определить векторы коэффициентов и матрицы уравнения (2.1), которые соответствуют оптимальному значению коэффициента качества. Описание для статического режима системы получают как частный случай уравнения (2.1) при $n_1 = n_2 = n_3 = 0$.

Постановка задач кратко- и долгосрочного прогноза. Даны величины u_t , которые влияют на величину w или коррелированы с ней. В результате наблюдений получаем выборку с ограниченным объемом реализаций w_t, v_t , $t \in N$. Исследуется поведение величины $w_{t+\tau}$ на интервале прогнозирования $\tau \in P$. Для этой цели нужно осуществить прогноз вида

$$w_{t+\tau} = f(w_t, w_{t-1}, \dots, w_{t-k}, v_t, v_{t-1}, \dots, v_{t-k}).$$

В качестве меры совпадения выхода модели $w_{t+\tau}^M$ и наблюдаемого выхода $w_{t+\tau}$ служит критерий качества $Q(w_{t+\tau}, w_{t+\tau}^M)$. Обозначая $y_t = w_{t+\tau}$, $x_{it} = \begin{pmatrix} w_{t-i} \\ v_{t-i} \end{pmatrix}$, приходим к задаче определения по наблюдениям

w_t, v_t вектора и матрицы коэффициентов уравнения (2.1), обеспечивающих оптимальное значение критерия качества. При $P \leq 3 \cdot 10$ прогноз называется краткосрочным, а при $P > 10$ — долгосрочным (см. раздел 1.1.5).

Постановка задачи распознавания образов. Распознавание образов также можно рассматривать как задачу интерполяции. Задается класс объектов $O = \{O_j | j \in J, J = J_A \cup J_B\}$ с признаками x_t ($t = 1, \dots, m$), образующими вектор. Признаки объектов должны так отличаться между собой, чтобы выборки A и B были различимы (гипотеза компактности). На этапе обучения предъявляется ряд изображений с реализациями признаков x_{tk} , $k = 1(1)K$, причем учитель при помощи выбора значения y_k указывает на принадлежность к классу A или B , т. е.

$$y_k = \begin{cases} 1 & k \in J_A; \\ -1 & k \in J_B. \end{cases}$$

Ищется разделяющая дискриминантная функция $y = f(x)$, с помощью которой можно классифицировать новые изображения, не учитываемые при обучении. Если $y_t^M > 0$, то классифицируемое изображение принадлежит к классу A , в противном случае — к классу B . Для этой цели $f(x)$ при заданном критерии качества $Q(y_t, y_t^M)$ можно приближенно аппроксимировать полиномом или другими подходящими функциями. При этом возникает задача определения по наблюдениям y_j, x_j векторов и матриц коэффициентов, соответствующих оптимальному значению критерия качества распознавания изображений.

Задачи идентификации, прогноза и распознавания образов могут быть решены как детерминированными или вероятностными методами, так и при помощи самоорганизации, т. е. постепенного усложнения модели с оценкой ее по внешним критериям, минимум которых определяет модель оптимальной сложности.

2.1.2. ГЕНЕРАЦИЯ МОДЕЛЕЙ-ПРЕТЕНДЕНТОВ С РАЗЛИЧНОЙ СЛОЖНОСТЬЮ СТРУКТУРЫ

Сложность структуры модели пропорциональна алгебраическому минимуму точек измерений (реализаций), необходимому для определения оценок всех параметров при точных данных. Для полиномиальных моделей определению (чаще всего по методу наименьших квадратов) подлежат оценки коэффициентов при слагаемых с различными показателями степени переменных. При самоорганизации моделей используется некоторый генератор моделей-претендентов, который задает структуры решений различной сложности, в том числе и избыточной. Самоорганизация (оценка по критериям) дает возможность исключить отношения и связи, которые излишни или случайны. Если, согласно Лейбницу, половина искусства изобретения состоит в посте-

пенном повышении сложности комбинаций (или в построении генератора предложений), то можно утверждать, что вторая половина состоит в выборе критериев самоорганизации [39].

Для самоорганизации используется генерация большого числа до статочно разнообразных моделей-претендентов различной сложности. После исключения явно непригодных моделей остальное множество их оценивается по критериям качества и выбирается *модель оптимальной сложности*. Алгоритмы самоорганизации различаются по способу генерации моделей различной сложности структуры [однорядные (комбинаторные), многорядные (пороговые) или с «занулением» коэффициентов, многоэтапные и др.] и по ансамблю критериев. Многокритериальный выбор модели необходим для повышения помехоустойчивости алгоритмов самоорганизации.

Генерация множества моделей-претендентов, основанная на принципах полной и неполной математической индукции. Различают методы полной и неполной математической индукции. Полная математическая индукция реализуется в однорядных алгоритмах, а неполная — в многорядных алгоритмах МГУА. При полной индукции перебираются все возможные элементарные модели, причем объем перебора может стать недопустимо большим. Например, для полинома четвертой степени всего лишь с двумя переменными x_1 и x_2 , имеющего 14 членов, получим $2^{14} = 16\,384$ возможных вариантов модели, среди которых нужно найти модель оптимальной сложности.

Очевидно, что несмотря на ряд эффективных предложений, все же в некоторых задачах могут быть достигнуты границы вычислительных возможностей современных ЭВМ. В этом случае помогает переход к неполной индукции, при которой благодаря разумно выбранной комбинации опорных функций (например, в соответствии с МГУА, т. е. многорядностью алгоритмов) число вариантов остается в пределах реализуемости. Но в многорядных алгоритмах существует вероятность пропуска модели оптимальной сложности, хотя весьма близкая по критерию модель обязательно будет найдена в процессе перебора.

2.1.3. ПРИНЦИПЫ, НА КОТОРЫХ ОСНОВАНЫ АЛГОРИТМЫ САМООРГАНИЗАЦИИ

Рассмотрим основные принципы, лежащие в основе алгоритмов самоорганизации математических моделей сложных объектов:

2.1.3.1 Принцип самоорганизации модели. Основной принцип самоорганизации можно сформулировать так. при постепенном увеличении сложности структуры модели значение внешних критериев сначала падает, достигает минимума, а затем или остается постоянным (в алгоритмах с вычислением остатков), или начинает увеличиваться (в алгоритмах без вычисления остатков).

Первое наименьшее значение критерия определяет единственную модель оптимальной сложности. Всегда можно найти такой способ

изменения сложности структуры модели, чтобы указанный минимум был единственным. Кроме того, если какой-либо критерий приводит к множественности выбора или слишком чувствителен к малым изменениям входных данных, то добавление к нему второго критерия (регуляризирующего оператора) с одномодальной характеристикой позволяет получить однозначность выбора модели оптимальной сложности.

2.1.3.2. Принцип внешнего дополнения. Задачи интерполяции относятся к некорректно поставленным, имеющим многозначное решение. Для однозначного решения их необходимо разумно выбранное внешнее дополнение — внешний критерий. Под внешним критерием будем понимать критерий, вычисляемый на информации, не использованной при оценке параметров. Для каждого внешнего дополнения получают соответствующее ему решение задачи интерполяции, т. е. модели оптимальной сложности в зависимости от выбора внешнего дополнения могут быть различны.

Внутренние дополнения (критерии), т. е. критерии, не использующие никакой дополнительной информации, при наличии помех не могут решить задачу выбора модели оптимальной сложности. Среднеквадратичное отклонение на обучающей последовательности с ростом сложности модели монотонно падает и в точке, где число параметров модели равно объему выборки, становится тождественно равным нулю: *чем сложнее модель, тем она точнее*.

Применительно к задаче самоорганизации моделей этот принцип означает: по данным обучающей последовательности, которые уже использовались для оценки параметров, без дополнительной внешней информации принципиально невозможно найти единственную модель оптимальной сложности. Необходим внешний критерий, который, например, оценивает ошибки на новых реализациях, т. е. на проверочной последовательности N_B .

2.1.3.3 Геделевский подход при самоорганизации моделей. Принцип внешнего дополнения впервые был сформулирован С. Биром [6] в качестве способа преодоления следствий теоремы неполноты Геделя (из математической логики). Теорема утверждает, что для любой системы исходных аксиом (внешних дополнений первого уровня) всегда можно задать такую теорему, для доказательства которой недостаточно данной системы аксиом и требуются новые аксиомы — внешние дополнения.

Язык внешних дополнений второго уровня должен быть более общим, чем язык внешних дополнений первого уровня. В работе Геделя указан круг логических систем, где действует его теорема.

Теорема Геделя о неполноте любого множества аксиом произвела настоящий переворот в математической логике, так как до нее считалось возможным доказательство полностью всех теорем, которые следуют из заданной аксиоматики, т. е. построение полной (замкнутой) геометрии, алгебры и других наук. Гедель показал, что замкнутых наук не существует. Можно указать бесконечное множество теорем

для доказательства которых требуется соответствующее расширение множества аксиом.

В применении к самоорганизации моделей идеи Геделя можно интерпретировать так: по минимуму заданного внешнего критерия можно решить все вопросы о выборе опорных функций, структуры и параметров модели, кроме вопросов, затрагивающих алгоритм вычисления и способы применения самих критериев. Для оптимизации самих критериев можно воспользоваться геделевской иерархией уровней языка критериев по степени общности (нечеткости). Критерии, служащие для выбора модели оптимальной сложности, назовем внешними критериями первого нижнего уровня. Тогда для оптимизации критериев первого уровня требуются более общие критерии второго уровня. Для решения всех вопросов по критериям второго уровня требуется указание еще более общих критериев третьего уровня и т. д.

Применительно к системам управления геделевский подход означает, что контур обратной связи стабилизирует все переменные, кроме внешнего дополнения — напряжения задатчика. Для стабилизации напряжения задатчика требуется создание еще одного более широкого контура обратной связи со своим задатчиком второго уровня и т. д.

П р и м е ч а н и е. Теорема Геделя может быть интерпретирована только для так называемых систем стабилизации геделевского типа с задатчиками. Существуют системы стабилизации негеделевского типа, где задатчики отсутствуют. Примерами могут быть дифференциальные системы, действующие по разности величин положительной и отрицательной обратной связи (модераторы), а также стабилизаторы по интегралу отклонения регулируемой величины [31]. Аналогия задачи моделирования и управления отмечалась выше (рис. 1.1). Следовательно, и в моделировании возможна разработка алгоритмов негеделевского типа, без внешних дополнений. Эти вопросы еще недостаточно разработаны.

2.1.3.4. Внешние критерии селекции моделей. При регрессионном анализе для различных выборок одного и того же процесса получают различные функции регрессии, поэтому нет смысла отдельным коэффициентам регрессии присваивать какое-либо значение [61]. Результат изменяется коренным образом, если уравнения регрессии (модели) выбираются по критерию минимума смещения — *непротиворечивости*, по которому требуется, чтобы модели, полученные на части таблицы *A*, возможно меньше отличались от моделей, полученных на части *B*. Критерий минимума смещения является основным, так как непротиворечивость является обязательным свойством оптимальной модели. Критерий, получивший распространение первым, называется *критерием регулярности*. Он требует, чтобы среднеквадратичная ошибка на части таблицы *B* (не используемой для оценки коэффициентов) была бы минимальной. Критерий можно применить как вспомогательный, регуляризирующий, в дополнение к основному критерию минимума смещения.

В качестве регуляризирующего более удобен *критерий точности многошагового прогноза* — для разностных прогнозирующих моделей. Для алгебраических моделей его заменяют *критерием точности краткосрочного прогноза*, который также часто используется как ограничение перебора моделей.

2.1.3.5. Разделение таблицы данных на части. Основной критерий минимума смещения (или непротиворечивости) требует разделения таблицы данных на две равные части *A* и *B*. Изменение состава точек каждой из частей обычно мало влияет на значение критерия. Вспомогательные регуляризирующие критерии не одинаковы в смысле требований к разделению таблицы. *Критерий точности многошагового прогноза* вообще не требует ее разделения. Наиболее сложным является вопрос о разделении таблицы данных для вычисления *критерия регулярности*.

Обычно таблица исходных данных процесса делится на две или три части: обучающую *A*, проверочную *B* и экзаменационную выборку *C*. В то время, как обучающая выборка служит для получения оценок параметров модели (например, коэффициентов регрессии), проверочная применяется для выбора структуры модели. В этом смысле проверочная выборка в соответствии с требованием повторяемости эксперимента [2] служит для выбора модели оптимальной сложности. Экзаменационная выборка применяется для оценки различных моделей, а также ее можно использовать для выбора оптимального разделения на обучающую и проверочную выборки.

2.1.3.6. Гипотеза селекции. Принцип селекции в биологии обеспечивает постепенное изменение вида, генетически обусловленное и адекватное внешнему миру [64]. Этот принцип издавна успешно действует как при эволюции, так и при искусственном выведении новых видов. Он оказался также удобным для использования в алгоритмах переработки информации в сложных системах.

В качестве примера рассмотрим селекцию по Дарвину. Для получения растений с желательными свойствами высаживается большое количество растений, которые могут ими обладать (первая эвристика — выбор исходных элементов). Первое скрещивание этих растений дает первое поколение, которому в алгоритмах самоорганизации соответствует получение попарных комбинаций (последовательное повышение сложности). Из урожая первого поколения выбирается определенная часть растений, которые более или менее удовлетворяют нашим представлениям (вторая эвристика — задание порогового значения, т. е. числа растений, которые выбираются для второго поколения). Отобранные таким образом растения высаживаются и их скрещивание дает второе поколение (попарная комбинация которого по выходным элементам обладает большей сложностью, чем та, которую проявляют элементы первого поколения). Второе поколение может быть опять подвергнуто пороговому отбору и т. д.

Принцип массовой селекции целесообразно включать в основной аппарат кибернетики, подобно тому как это было сделано в теории пер-

цептрона Ф. Розенблатта [65, 69]. При этом следует придерживаться следующих основных правил

для каждого поколения (или ряда селекции модели) существует некоторое минимальное число выбираемых комбинаций, называемой свободой выбора и обеспечивающее сходимость многорядной селекции модели оптимальной сложности;

слишком большое число поколений ведет к вырождению (информационная матрица становится плохо обусловленной); чем сложнее задача селекции, тем больше требуется поколений для получения модели оптимальной сложности. Кроме того, нужно определить эвристически алгоритм генератора моделей-претендентов; правило повышения сложности моделей-претендентов; критерии селекции и последовательность их применения; величину порогового значения, определяющего число пропускаемых в следующий ряд моделей (т. е. свободу выбора); правило разделения исходных данных на обучающую, проверочную и экзаменационную выборку данных, причем для обеих величин (порог и разделение) существуют оптимальные значения.

Можно сформулировать следующую теорему [23]: вероятность того, что при селекции будет потеряно лучшее решение и будет получено одно из лучших, близлежащих решений, тем меньше, чем больше выходная величина модели-претендента превосходит установленное пороговое значение. Согласно этой теореме, менее эффективные комбинации, исключенные в первых поколениях, не могут дать эффективные комбинации в последующих.

В соответствии с теорией самоорганизации метод генерирования последовательных комбинаций и отбора математических моделей, при возрастании их сложности, является универсальным методом отыскания модели оптимальной сложности. Оптимальное решение находится тогда, когда сложность модели равна или меньше сложности исследуемого объекта. Последнее имеет место при наличии помех в исходных данных. В многорядных алгоритмах при неполном базисе возможно появление небольшой ошибки многорядности.

Можно показать, что для опорных функций в виде полиномов ошибку многорядности следует находить по разности прогнозов, полученных на моделях полной и неполной индукции [24]. Разработаны алгоритмы, которые в каждом поколении дополнительно используют исходные наблюдения и поэтому не обладают указанной ошибкой [92].

В результате «проклятия размерности», как его называл Р. Беллман, если идти по пути организации полного перебора, то можно решать только сравнительно простые задачи. Поэтому и применение комбинаторных алгоритмов ограничено. Использование же принципа селекции, т. е. многорядных алгоритмов МГУА с пороговыми отборами, является эффективным средством преодоления «проклятия размерности».

2.1.3.7. Принцип сохранения свободы выбора. Принцип сохранения свободы выбора, или принцип неокончателных решений, является

одним из фундаментальных в самоорганизации и имеет много общего с принципом селекции. Он некоторым образом дополняет широко распространенный до настоящего времени принцип «жесткого» решения, или «жесткого планирования», по которому при каждом принятии решения не остается никакой свободы выбора. В соответствии с этим принципом оптимальность достигается при помощи последовательного ряда решений. Свобода выбора обеспечивается тем, что на каждый следующий ряд селекции передается не одно решение, а несколько лучших, отобранных в предыдущем ряду.

Примером может быть принятие решения типа: школа будет построена в x -м году, если посещаемость классов в данной местности составит сорок учеников. Если она будет меньше, то следует построить мост, через который нужно возить детей в другую школу [24].

Д. Габор исчерпывающим образом изложил этот принцип: принимать решение в данный момент времени нужно таким образом, чтобы в последующий момент времени, где будет необходимость в очередном решении, сохранялась бы свобода выбора решений. В его работе содержится попытка ввести меру для свободы принятия решения. В фазовом пространстве для этого можно использовать фазовый объем D , однако более удобным для использования оказался радиус действия R [39].

При самоорганизации математических моделей принцип неокончателных решений (сохранение свободы выбора) Габора находит применение в двух случаях:

- 1) при разработке многорядных алгоритмов МГУА;
- 2) при последовательном применении ряда критериев для выбора лучших моделей.

Принцип сохранения свободы требует, чтобы в процессе последовательного принятия решений в каждом ряду алгоритма выбиралось определенное число F лучших решений. При этом F нужно выбирать так, чтобы дальнейшее его увеличение не давало существенного улучшения результатов селекции. Лишь в последнем ряду, где достигается минимум критерия селекции, выбирается одно самое лучшее решение — модель оптимальной сложности.

Управление, планирование и распознавание образов, при которых на каждом ряду определяется единственное решение, может быть в соответствии с этим определено как жесткое или детерминированное. Если в каждый момент принятия решения выбирается определенное число решений, которые в соответствии с некоторым критерием селекции близки к оптимальному, то это соответствует принципам многорядности. Многорядность и наличие свободы выбора после каждого ряда селекции являются основополагающими свойствами алгоритмов самоорганизации.

2.1.3.8. Применение эвристических методов. Самоорганизация тесно связана с эвристическими методами, поэтому в первых публикациях она часто называлась эвристической самоорганизацией [30].

Представителей детерминированного мышления часто не удовлетворяют результаты, полученные эвристическим путем, как необоснованные, хотя и достаточные для практических целей. Эти понятия еще не получили достаточно строгих определений, однако под эвристическими методами можно понимать такие, которые основаны на применении правил, методов и упрощений, обобщающих весь предыдущий опыт лица, решающего задачу [23].

Точность результатов моделирования зависит не только от совершенства математического аппарата (вычислительных программ), но также от целесообразного выбора критерия качества и искусства применения этого аппарата. Эвристический характер самоорганизации моделей особенно проявляется при выборе опорной функции частных описаний (образование вариантов моделей), критериев селекции моделей, способа регуляризации, способа нормирования переменных, конкретной реализации последовательного повышения сложности моделей-претендентов. Пороговые значения, используемые при пороговом отборе (селекции), могут быть заданы эвристически и уточнены при помощи многократного повторения вычислений со сравнением векторов.

2.1.3.9. Одновременное моделирование на различных уровнях общности языка математического описания объекта. При самоорганизации математических моделей, предназначенных для долгосрочного прогнозирования, важен, как оказалось, в дополнение к уже названным принципам, еще принцип многоуровневого моделирования. Его применение рассматривается в гл. 4.

2.1.4. ВЫБОР МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Использование приведенных в разд. 2.1.2 принципов позволяет осуществить самоорганизацию математических моделей на ЭВМ.

В соответствии с принципом самоорганизации с использованием неполной математической индукции и многорядной процедуры селекции получают ряд вариантов модели при заданном виде опорных функций. В общем случае в каждом ряду селекции получают модели, линейные по коэффициентам. Использование полной математической индукции приводит к так называемым однорядным комбинаторным алгоритмам.

Для простоты вычислений при оценке коэффициентов на обучающей последовательности можно применять метод наименьших квадратов. С увеличением сложности (т. е. числа переменных или степени полинома вариантов модели) аппроксимация на обучающей последовательности становится все лучше, т. е. среднеквадратичное отклонение все время уменьшается.

Согласно принципу самоорганизации, с ростом сложности модели S внешний критерий (например, среднеквадратичное отклонение на проверочной выборке σ_B^2) проходит через минимум (рис. 2.1). Для

обеспечения свободы выбора на каждом ряду селекции (в каждом поколении) нужно выбрать определенное число лучших моделей. При этом число устанавливаемых при помощи селекции лучших вариантов модели, в соответствии с принципом свободы выбора, существенно больше единицы. Если дальнейшее увеличение числа рядов селекции не дает улучшения внешнего критерия, то это значит, что получена модель оптимальной сложности.

Основной алгоритм самоорганизации предполагает, что априори заданы: правило усложнения модели (разд. 2.2), система

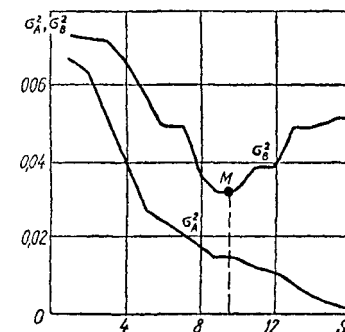


Рис 2.1. Графики изменения среднеквадратичных ошибок σ_A^2 и σ_B^2 при постепенном усложнении структуры модели S :
М — модель оптимальной сложности

опорных функций (разд. 2.3), критерии селекции (разд. 2.4) и, следовательно, метод регуляризации (разд. 2.5).

При реализации алгоритмов самоорганизации на ЭВМ возникают существенные затруднения, особенно из-за необходимого объема памяти и вычислительного времени. Обойти эти трудности часто помогает умелое использование многорядного алгоритма селекции.

2.1.5. САМООРГАНИЗАЦИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Сформулированные в разд. 2.1.3 принципы дают определенное представление о том, что же следует понимать под самоорганизацией моделей.

Исходя из имеющегося множества воздействий и интересующих нас системных величин, на ЭВМ строится большое число моделей-претендентов и при помощи соответствующего выбора выбирается так называемая модель оптимальной сложности. Модельер задает машине критерии отбора, класс опорных функций и алгоритм генерирования моделей, равно как и способ регуляризации. Такой подход в литературе называется индуктивным методом самоорганизации моделей, так как искомая модель оптимальной сложности получается в результате полного или неполного рационального перебора возможных вариантов. В общем случае нелинейная задача оптимизации, связанная с получением модели оптимальной сложности в соответствии с заданным критерием качества, не может быть решена аналитически при помощи дедуктивных математических методов, так как зависимость критерия качества от сложности модели неизвестна.

Индуктивным методом можно достичь определенной объективности построенной модели, причем требуется минимальный объем априорной

информации. Однако это не означает, что совершенно не используются имеющиеся сведения об исследуемом объекте. При практическом применении стремятся к комбинации детерминированного дедуктивного и индуктивного методов построения модели. Чем меньше используется априорная информация, тем больше нужно образовывать конкурирующих моделей, из которых может быть выбрана модель оптимальной сложности.

Вышеуказанные принципы самоорганизации применяются для самоорганизации математической модели на ЭВМ по реализациям входных и выходных величин. При этом самоорганизация предъявляет незначительные требования к априорной информации: достаточно небольшого числа наблюдений и словесных формулировок цели моделирования. При полной неопределенности в соответствии с известной второй теоремой Ф. Розенблатта [65, 69], согласно которой бесконечный перцептрон в состоянии сам научиться распознавать образы, необходимо осуществить перебор бесконечно большого количества вариантов модели.

Аналогично, при чисто индуктивном подходе и полном отсутствии априорной информации требуется нереализуемо большое число конкурирующих моделей, поэтому следует стремиться к комбинированной методике, направленной на уменьшение необходимого по закону У. Р. Эшби многообразия и основанной на девизе: если человек что-то знает точно, то он не должен скрывать это от ЭВМ [91].

Кроме того, индуктивную методику самоорганизации не следует рассматривать как альтернативу дедуктивной методике построения моделей. При комбинированном методе моделирования модели получаются как при помощи системного анализа и аксиоматического подхода, так и при помощи самоорганизации [44].

Применение самоорганизации позволяет сократить требующуюся априорную информацию и ограничиться знанием нескольких существенных достоверных данных, например:

модель вчера, сегодня и завтра должна оставаться одной и той же, прогноз должен быть по возможности точным;

определенная закономерность сохраняет свое действие в заданном интервале времени;

задается класс систем, к которым принадлежит модель (так, линейная, нелинейная, статическая, динамическая, переменная во времени, неизменная во времени и т. д.).

Выбранная модель хороша настолько, насколько нам удастся преобразовать эти словесные формулировки в формализованные внешние критерии и получить искомую структуру модели при помощи выбора опорных функций и правила постепенного повышения сложности. Следует подчеркнуть, что самоорганизация открыта для всякого привлечения априорной информации и, как указывалось выше, ничего достоверно известного «скрывать» от ЭВМ не следует. Априорная информация улучшает самоорганизацию модели. Если мы располагаем

информацией о структуре системы, выходных величинах, памяти системы и т. д., то требуемое число вариантов при поиске модели оптимальной сложности существенно сокращается, необходимые вычисления упрощаются и, главное, возрастает точность решения задачи (т. е. точность идентификации или прогноза).

Вычислительные эксперименты показали, например, что априорное указание характера корней характеристического уравнения исследуемой системы (действительные или комплексные) существенно повышает помехоустойчивость метода получения модели оптимальной сложности. Увеличение объема достоверной априорной информации повышает помехоустойчивость самоорганизации [24, 37] (см. также разд. 2.6.4).

2.1.6. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ, ПОЛУЧАЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ САМООРГАНИЗАЦИИ

Самоорганизация принадлежит к эмпирическим (апостериорным) методам моделирования. Эти методы в своей области применения по сравнению с теоретическими (априорными) и полуэмпирическими (например, имитационными) методами построения моделей имеют определенные преимущества. В тех случаях, когда наблюдаем параметры интересующего нас объекта, но не знаем структуру и механизм взаимо-

1. Функциональное назначение моделей

Вид модели	Назначение модели при уровне исследования					
	эмпирическом		теоретическом			
	Измерение	Феноменологическое описание	Интерпретация	Объяснение	Прогноз	Проверка гипотез
Аналитико-теоретическая		×	×	×		
Имитационная	×	×			×	×
Самоорганизующаяся	×				×	×

действия между элементами сложной системы, поведение которой определяет значения параметров, подход самоорганизации является единственным надежным средством построения прогнозирующих моделей [24]. При помощи самоорганизации решение можно найти и в том случае, когда другим способом нельзя получить результатов. Как указывалось, модели, полученные при помощи самоорганизации, имеют свою специфическую область применения и особенно эффективны для долгосрочного прогноза. Физические модели, полученные на основе

математической теории исследуемого класса объектов, могут преследовать лишь вполне определенные познавательные цели (идентификация и краткосрочный прогноз) [10]. Функциональное назначение моделей показано в табл. 1. Каждая модель имеет свои специфические особенности и ограниченный круг задач, решаемых ею. Никакая модель не может одновременно выполнять все задачи — результат, на который указывал Б. С. Флейшман, когда отмечал, что модель не может одновременно выполнять функцию предсказания и построения теории [81]. В частности, модели для краткосрочного и долгосрочного прогноза различны по структуре, аргументам и оценкам коэффициентов.

С одной стороны, при идентификации объекта теоретико-аналитическое построение физической модели может иметь преимущество, однако, например, для целей количественного прогнозирования при наличии помех физическая модель непригодна (см. гл. 3)*. С другой стороны, при недостаточной априорной информации самоорганизация, имитация и теоретико-аналитическое построение модели могут хорошо дополнять друг друга, они не являются альтернативными. С помощью аналитических моделей получают первый прообраз и «теоретическое» представление проблематики. Закономерности и принципы, найденные при теоретическом подходе, можно затем учесть при имитации и, наконец, при самоорганизации. Имитация и особенно самоорганизация позволяют в отдельных случаях уточнять исходные высказывания и анализировать воздействия, которые остаются неучтенными при теоретико-аналитическом подходе. Поэтому сложность моделей, используемых для имитации, корректируется при помощи моделей, получаемых при помощи самоорганизации [44]. Сложность исследуемого объекта при этом так высока, что ученый или коллектив ученых не располагают никакой надежной информацией о системе или ее частях и поэтому не могут указать структуру частных моделей. Примерами могут служить зависимость продолжительности жизни человека от загрязнения окружающей среды [80] и процесс распада химических ядов в модели Азовского моря [17]. Это указывает на необходимость расширения арсенала надежного построения моделей за счет новых объективных методов самоорганизации, благодаря которому становится возможным для частей многокомпонентной системной модели, для которых еще не существовало научно обоснованных априорных знаний, вместо допущений и грубых оценок предложить модели, основанные на надежной информации (наблюдения, цели исследования и т. д.) и полученные при помощи самоорганизации. Практически важно то, что модели сложных компонентов системы могут быть получены по весьма малым выборкам данных наблюдений (минимальные размеры выборок указаны в разд. 2.6.2).

* Физическая модель в условиях помех всегда хоть немного, но не точна! Следовательно, ошибка пошагового прогноза будет прогрессивно нарастать при увеличении времени упреждения.

2.1.7. УСТРАНЕНИЕ ВРЕДНЫХ ПРИЗНАКОВ (ИЛИ ФАКТОРОВ) ПРИ ПОМОЩИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ САМООРГАНИЗАЦИИ

При малых выборках оказывается, что носители информации (признаки, сигналы или факторы) вследствие несовершенства реальных систем распознавания образов и идентификации, а также вследствие ограниченной длины обучающих последовательностей данных могут быть как полезными, так и даже вредными. Если бы мы располагали выборкой бесконечной длины и идеальной системой, то все признаки были бы полезными (т. е. приводили бы к уменьшению среднеквадратичного отклонения) либо только бесполезными, но не активно-вредными.

Исключение вредных факторов выражается в том, что при наличии помех в результате самоорганизации получается модель оптимальной сложности, более простая, чем полная физическая модель. Оптимальная нефизическая модель содержит только часть факторов полной модели.

Следует обратить внимание на выбор множества выходных переменных. Только некоторые из них дают непротиворечивые уравнения, которые остаются почти неизменными для отдельных частей таблицы данных наблюдений объекта. Такие переменные, называемые ведущими, будут отобраны при самоорганизации моделей в системы уравнений по системному критерию несмещенности (алгоритм ОСА). Само понятие *модель* предполагает непротиворечивость и несмещенность входящих в нее уравнений.

2.1.8. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ

Последним этапом идентификации является проверка адекватности или верификация модели, состоящая из проверки полученной модели на пригодность для решения задачи по конечному результату (например, для целей управления, которое будет осуществлено при помощи данной модели). Очевидно, что такая процедура неэкономична и ее часто заменяют более простой: проверкой по точности некоторой промежуточной величины. При самоорганизации такие приемы уже включены в процедуру получения модели благодаря применению методов регуляризации с помощью заданных критериев селекции.

Различные алгоритмы самоорганизации отличаются от известных статистических методов (пошаговая регрессия, вычисление всех возможных регрессий и др.) наряду с многорядностью и применением принципа селекции (в частности, с использованием принципа свободы выбора Д. Габора) тем, что в них применяются более целесообразные внешние критерии, связанные с целью моделирования. При этом внешний критерий имеет минимум и благодаря этому может од-

нозначно определять модель оптимальной сложности. Многорядные алгоритмы самоорганизации дают в каждом ряду частные модели, число параметров которых существенно меньше числа реализаций обучающей последовательности, поэтому для частных моделей можно выполнить проверку значимости, принятую в математической статистике (например, по критерию значимости Стьюдента).

2.1 8.1. Глубина минимума критерия как показатель адекватности модели. Объективность выбора модели основывается на том, что модели оптимальной сложности соответствуют минимуму критерия селекции. Мерой качества, или адекватности модели при этом может быть минимальное значение критерия селекции. Модель с меньшим, более глубоко выраженным минимумом критерия селекции, является более достоверной и точной. Минимальное значение критерия регулярности пропорционально критерию достоверности Фишера [24]. Исследование ряда примеров показало, что ЭВМ с помощью алгоритмов самоорганизации в состоянии выбрать искомую модель оптимальной сложности, если выполнены следующие условия:

1) в ряду вариантов моделей-претендентов, получаемом при постепенном повышении сложности модели, содержится искомая модель оптимальной сложности. Это означает, что правило образования все более сложных вариантов модели, система опорных функций и множество выходных переменных соответствуют этой модели;

2) реализации наблюдаются достаточно точно и шумы не слишком велики [37];

3) число реализаций достаточно велико.

Как правило, минимум критерия селекции должен иметь значение порядка точности наблюдений, т. е. ориентировочно 5—10 % значения критерия на первом ряду селекции [10].

Если с повышением сложности не достигают явно выраженного глубокого минимума, то это значит, что вышеуказанные требования нарушены и самоорганизация не дала успешных результатов и, следовательно, нужно обеспечить выполнение указанных трех условий.

Практическое использование алгоритмов МГУА при работе в реальном масштабе времени. Самоорганизация прогнозирующей модели на ЭВМ может занимать значительное время. Однако расчет прогнозов по полученной модели в реальном масштабе времени осуществляется весьма быстро. В реальном масштабе времени применялись, например, модели для прогноза процессов деструкции пестицидов [39]. Алгоритм МГУА, использующий в качестве опорной функции формулы Байеса, работал около 2 ч. На сельскохозяйственных контрольных станциях по полученной формуле расчет занимает около 1 мин.

2.2. АЛГОРИТМЫ САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ

2.2.1. ОСНОВНАЯ СТРУКТУРА АЛГОРИТМОВ САМООРГАНИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Основная структура алгоритмов самоорганизации состоит из следующих блоков:

- 1) предварительная обработка наблюдений с учетом системы выбранных опорных функций (сокращается множество переменных);
- 2) генерация множества моделей-претендентов;
- 3) вычисление критериев селекции, являющихся внешним дополнением, и отбор модели оптимальной сложности.

Алгоритмы самоорганизации различаются по второму блоку, т. е. по методу образования более сложных вариантов модели. В общей структурной схеме алгоритмов самоорганизации (рис. 2.2) содержится блок образования моделей (генератор моделей-претендентов Γ), на выходе которого в соответствии с принятым алгоритмом повышения сложности вариантов моделей получают частные модели возрастающей сложности. Устройство для отбора Σ в соответствии с заданным критерием K выбирает модель оптимальной сложности M [73].

В зависимости от способа генерирования вариантов моделей различают алгоритмы полной (однорядные) и неполной (многорядные) индукции.

2.2.2. ОДНОРЯДНЫЕ (КОМБИНАТОРНЫЕ) АЛГОРИТМЫ МГУА

Алгоритмы полной индукции, называемые также комбинаторными, можно получить из заданного полного полинома вычеркиванием слагаемых. Ввиду перебора всех возможных вариантов частных моделей они требуют много времени для вычисления значительного объема памяти, поэтому могут применяться только при сравнительно небольшом числе аргументов.

Для системы, описываемой уравнением

$$y = \sum_{i=0}^m a_i v_i,$$

при $v_0 = 1$, применимы комбинаторные алгоритмы до $m \leq 20$, в которых последовательно генерируются $2^{m+1} - 1$ моделей, причем для 1-го аргумента — $\binom{m+1}{1}$ моделей, для всех комбинаций по 2 аргумента — $\binom{m+1}{2}$ моделей, для всех комбинаций по 3 аргумента — $\binom{m+1}{3}$ моделей и т. д.

Ступенчатое повышение сложности частных моделей для случая, когда уравнение регрессии имеет вид полинома второй степени с двумя

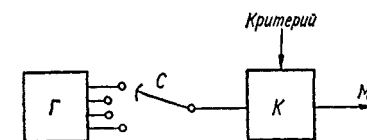


Рис. 2.2. Общая структурная схема алгоритмов самоорганизации модели

они требуют много времени для вычисления значительного объема памяти, поэтому могут применяться только при сравнительно небольшом числе аргументов.

Для системы, описываемой уравнением

$$y = \sum_{i=0}^m a_i v_i,$$

при $v_0 = 1$, применимы комбинаторные алгоритмы до $m \leq 20$, в которых последовательно генерируются $2^{m+1} - 1$ моделей, причем для 1-го аргумента — $\binom{m+1}{1}$ моделей, для всех комбинаций по 2 аргумента — $\binom{m+1}{2}$ моделей, для всех комбинаций по 3 аргумента — $\binom{m+1}{3}$ моделей и т. д.

Ступенчатое повышение сложности частных моделей для случая, когда уравнение регрессии имеет вид полинома второй степени с двумя

2. Постепенное усложнение частных моделей-претендентов (для двух факторов)

v_1	v_2	$v_1 v_2$	v_1^2	v_2^2
$y_1 = a_0 + a_1 v_1$	$y_2 = a_0 + a_1 v_2$	$y_4 = a_0 + a_1 v_1 v_2$	$y_8 = a_0 + a_1 v_1^2$	$y_{16} = a_0 + a_1 v_2^2$
	$y_3 = a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2$	$y_5 = y_4 + a_2 v_1$	$y_9 = y_8 + a_2 v_1$	$y_{17} = y_{16} + a_2 v_1$
		$y_6 = y_4 + a_2 v_2$	$y_{10} = y_8 + a_2 v_2$	$y_{18} = y_{16} + a_2 v_2$
		$y_7 = y_4 + a_2 v_1 + a_3 v_2$	$y_{11} = y_8 + a_2 v_1 + a_3 v_2$	$y_{19} = y_{16} + a_2 v_1 + a_3 v_2$
			$y_{12} = y_8 + a_2 v_1 v_2$	$y_{20} = y_{16} + a_2 v_1 v_2$
			$y_{13} = y_{12} + a_3 v_1$	$y_{21} = y_{20} + a_3 v_1$
			$y_{14} = y_{12} + a_3 v_2$	$y_{22} = y_{20} + a_3 v_2$
			$y_{15} = y_{12} + a_3 v_1 + a_4 v_2$	$y_{23} = y_{20} + a_3 v_1 + a_4 v_2$
				$y_{24} = y_{16} + a_2 v_1^2$
				$y_{25} = y_{24} + a_3 v_1$
				$y_{26} = y_{24} + a_3 v_2$
				$y_{27} = y_{24} + a_3 v_1 + a_4 v_2$
				$y_{28} = y_{24} + a_3 v_1 v_2$
				$y_{29} = y_{28} + a_4 v_1$
				$y_{30} = y_{28} + a_4 v_2$
				$y_{31} = y_{30} + a_5 v_1$

переменными $y = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1^2 + a_4 u_2^2 + a_5 u_1 u_2$ при следующих значениях обобщенных переменных: $v_1 = u_1$; $v_2 = u_2$; $v_3 = u_1^2$; $v_4 = u_2^2$; $v_5 = u_1 u_2$, приведено в табл. 2. Свободный член соответствует среднему значению, поэтому различать модели со свободным членом и без него смысла не имеет, т. е. верно следующее равенство:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i v_i.$$

Обозначив через p число аргументов и через q степень уравнения регрессии, получим C_{p+q}^q элементов членов полной модели или $m = C_{p+q}^q - 1$. Полный полином при двух аргументах (степень которого не выше двух) содержит шесть членов:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 + a_5 x_1 x_2.$$

Если свободный член a_0 сохраняет все частные полиномы, то перебору подлежат

$$C_5^1 + C_5^2 + \dots + C_5^5 = 2^5 = 32 \text{ полинома.}$$

Полный полином при трех аргументах (третьей степени) содержит 20 слагаемых.

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2 + a_6 x_3^2 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_2 x_3 + a_9 x_3 x_1 + a_{10} x_1^2 x_2 + a_{11} x_1^2 x_3 + a_{12} x_2^2 x_1 + a_{13} x_2^2 x_3 + a_{14} x_3^2 x_1 + a_{15} x_3^2 x_2 + a_{16} x_1^3 + a_{17} x_2^3 + a_{18} x_3^3 + a_{19} x_1 x_2 x_3.$$

Перебору подлежат 2^{19} полиномов. Полный полином при четырех аргументах (четвертой степени) содержит 70 слагаемых. Перебору подлежат 2^{69} частных полиномов и т. д.

Число возможных вариантов быстро растет с увеличением числа аргументов p и степени полного полинома n , т. е. с ростом числа его членов. В качестве верхнего предела возможного количества вариантов практически можно назвать 2^{20} , т. е. полный полином должен содержать не более 20 слагаемых. Этот предел зависит от используемой ЭВМ и искусства программиста.

Многоэтапный комбинаторный алгоритм [76]. Эффективность комбинаторного алгоритма можно повысить так, что становится реальной задача перебора при полном полиноме, содержащем до 100 слагаемых. Первый способ состоит в следующем. Выбирается (по критериям) лучшая модель с двумя аргументами. К ней поочередно подбирается третий аргумент, затем четвертый и т. д., пока не будет использован последний. Алгоритм назван многоэтапным, он отвечает конечной процедуре (в отличие от многоэтапных алгоритмов, требующих применения правила останова).

Комбинаторный алгоритм с усечением перебора. Другой способ, называемый усечением треугольника перебора, состоит в том, что на перебор подаются только те частные полиномы (получаемые из полного вычеркиванием слагаемых), которые содержат достаточно малое число членов. Обоснованием является то, что все объекты в природе достаточно просты и слишком многофакторных моделей не встречается.

2.2.2.1. Мультипликативно-аддитивный нелинейный двухуровневый алгоритм МГУА с оптимизацией степени факторов. Описанные выше алгоритмы МГУА по виду опорных функций частных описаний делятся на несколько основных классов, которые можно построить, используя операцию сложения (аддитивные алгоритмы) или умножения (мультипликативные алгоритмы) факторов, взятых в единичной, целой или нецелой степени. Наиболее известны следующие классы алгоритмов:

1) с аддитивными (полиномиальными) частными описаниями при единичной степени факторов, предназначенные для перебора моделей в следующем классе структур:

$$y = \sum_{j \in J} \alpha_j x_j, \quad J \in \{1, 2, \dots, m\};$$

2) с мультипликативными частными описаниями при единичной степени факторов [23], предназначенные для поиска в следующем классе:

$$y = \prod_{j=1}^m \alpha_j x_j = \alpha \prod_{j=1}^m x_j;$$

3) обобщенные мультипликативно-аддитивные для класса

$$y = \left\{ \sum_{k=1}^c \alpha_k \prod_{j \in J_k} x_j \right\},$$

где c — показатель сложности.

Достаточно заменить единичную степень факторов x_j некоторым числом p , чтобы получить те же по названию алгоритмы, но при целых и нецелых степенях факторов.

Разработаны также алгоритмы для следующего класса структур:

$$y = \left\{ \sum_{k=1}^c \alpha_k \prod_{j=1}^m x_j^{p_{kj}} \right\}, \quad p_{kj} \in (0, \Delta h),$$

где Δh — наименьшая дробная степень, в которых априори называлась некоторая минимальная дробная степень исходных факторов (например, $p = 1/2$; $p = 1/3$ и т. д.). Модель оптимальной сложности в этом случае может быть представлена в виде суммы линейных и мультипликативных членов со степенями не выше наперед заданной степени.

Описываемый ниже алгоритм позволяет получить модели, содержащие мультипликативные члены в любых (в общем случае нецелых) положительных или отрицательных степенях.

Описание алгоритма. Представим первоначальную модель в виде произведения заданных факторов (аргументов) в неизвестных степенях:

$$y = a_0 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} = a_0 \prod_{j=1}^m x_j^{k_j}.$$

Прологарифмировав это выражение, получим

$$\ln y = \ln a_0 + k_1 \ln x_1 + k_2 \ln x_2 + \dots + k_m \ln x_m.$$

По выборке данных измерений величин $y, x_1, x_2, \dots, x_m$ составим выборку прологарифмированных значений указанных факторов. Далее, применяя один из известных полиномиальных алгоритмов МГУА с линейными частными описаниями при единичной степени факторов, находим логарифмическую модель оптимальной сложности. Потенцируя ее, получаем искомую оптимальную (в смысле минимума некоторого внешнего критерия) мультипликативную модель заданного процесса.

Для того чтобы получить обобщенную мультипликативно-аддитивную модель, по обычному алгоритму МГУА выбирается некоторое количество F лучших моделей, используемых на втором этапе алгоритма в качестве регрессоров. Здесь вторично применяется один из алгорит-

3. Исходные данные для самоорганизации мультипликативно-аддитивной модели интервального прогнозирования ширины колец сибирского кедра

Выборка	Десятилетия	Год									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	175	0,63 2	0,63 2	0,58 2	0,48 1	0,53 1	0,53 1	0,68 3	0,6 2	0,58 2	0,53 1
	176	0,75 4	0,75 4	0,75 4	0,73 4	0,68 3	0,65 3	0,73 4	1,3 10	1,03 8	0,88 6
	177	1,00 7	1,2 10	1,1 8	1 7	1,33 11	1,18 8	0,98 7	0,83 5	0,8 5	0,9 6
	178	0,95 7	0,9 6	0,85 6	0,8 5	0,7 4	0,73 4	0,9 6	0,93 7	0,98 6	1,18 9
	179	1,05 8	1,05 8	1,08 8	1,08 8	1,23 10	1,3 10	0,95 7	0,98 7	0,95 7	1,2 10
	180	1,18 9	1,18 9	1,18 9	1,1 9	1,23 10	1,28 10	1,25 10	1,18 9	1,18 9	1,53 11
	181	1,33 11	1,3 10	1,13 9	1,08 8	0,98 7	0,88 6	0,88 6	0,88 6	1,08 8	1,08 8
	182	1,2 10	1,1 9	0,88 6	0,88 6	0,95 7	0,95 7	1,5 11	1,45 11	1,25 10	1,13 9
	183	1,5 11	1,5 11	1,10 9	0,93 7	0,8 5	0,8 5	0,7 4	0,65 3	0,5 1	0,8 5
	184	0,68 3	0,73 4	0,83 5	0,73 4	0,65 3	0,9 6	0,68 3	0,68 3	0,58 2	0,68 3
B	185	0,63 2	0,68 3	0,75 4	0,73 4	0,68 3	0,6 2	0,55 1	0,63 2	0,5 1	0,75 4
	186	0,78 5	0,8 5	0,88 6	0,78 5	0,93 7	1,08 8	0,8 5	1,1 9	1,03 8	0,9 6
	187	0,75 4	0,83 5	0,65 3	0,68 3	0,78 5	0,78 5	0,85 6	0,88 6	0,73 4	0,65 3
	188	0,78 5	0,6 2	0,6 2	0,9 6	1 7	0,85 6	0,65 3	0,6 2	0,45 1	0,53 1
	189	0,48 1	0,75 4	0,73 4	0,78 5	0,93 7	0,58 2	0,58 2	0,68 3	0,83 5	0,85 6
	190	1,05 8	0,88 6	0,9 6	0,7 4	1,03 7	0,75 4	0,68 3	0,9 9	1,3 9	1,15 9
	191	1,4 11	1,8 12	1,33 11	1,35 11	1,3 10	1,1 9	0,8 5	1,08 8	1,2 10	1,1 9
	192	0,6 2	0,3 1	0,95 7	0,5 1	0,5 1	0,5 1	1,5 11	1,38 11	1,3 10	1,6 12
	193	1,4 11	1,7 12	2 12	1,9 12	1,9 12	2,2 12	2,2 12	1,95 12	4,5 12	3,4 12
	194	1,1 9	1 7	1,08 8	2,5 12	1,8 12	2,6 12	3,1 12	1,53 11	3 12	2,1 12
C ₁	195	2,1 12	1,5 11	1,38 11	1,3 10	1,5 11	1,1 9	2 12	1,28 10	1,2 10	1,2 10

Выборка	Десятилетия	Год									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_2 фактические значения	196	1,1 9	1,1 9	1,0 7	1,35 11	1,5 11	1,3 10	1,25 10	1,19 9	—	—
прогноз	196	1,13 9	1,19 9	0,99 7	1,16 10	1,49 11	1,16 9	1,12 9	1,06 8	—	—

мов МГУА с частными описаниями, содержащими члены и их ковариации (произведение по два).

Покажем эффективность алгоритма на конкретном примере решения достаточно сложной задачи среднесрочного прогнозирования.

Пример 7. Прогнозирование ширины годовых колец сибирского кедра.*

Ширина годичных колец кедр, измеренная как средняя величина по четырем перпендикулярным друг к другу радиусам, представлена в верхней строке табл. 3, в нижней приведено ее преобразованное ранговое значение (уровень). Показано разделение исходных данных на выборки точек: A — обучающая; B — проверочная; C_1 , C_2 — экзаменационная соответственно первая и вторая. Выборки A , B и C_1 используются для построения модели оптимальной сложности. Последовательность C_2 применяется только для оценки качества прогноза, так как точки этой последовательности не используются при самоорганизации модели. Данные относятся к кедр, зарегистрированному в Лимнологическом институте СО АН СССР под номером 790. Возраст кедр 260 лет (оз. Байкал, бухта Солонцовая, песчано-гравийный пляж). Ширина годичных колец измерялась на приборе Шпальте с точностью до 0,01 мм по четырем радиусам, соответствующим сторонам света. Затем данные четырех измерений усреднялись и получалась дендрощкала модельного дерева. Предполагаемая закономерность непосредственно из рассмотрения цифровых данных не просматривается.

Выбор неравномерной шкалы отсчета времени. По-видимому, одной из причин неудовлетворительных результатов использования разностных моделей при решении некоторых задач является использование равномерной шкалы отсчета времени при недостаточном малых размерах шага и числе учитываемых запаздываний. Чтобы преодолеть этот существенный недостаток применения разностных моделей, рекомендуется применять нелинейную шкалу отсчета времени или, по крайней мере, вводить определение среднего шага по ранговой (нечувствительной к выбору распределения помех или робастной) корреляционной функции. Отсчеты времени должны приблизительно соответствовать экстремумам ранговой корреляционной функции (включая ординату с запаздыванием на один шаг).

При преобразовании исходных данных ширины годовых колец q в ранговые величины (уровни) число последних было принято равным 12, а ширина полосы

* Задача прогнозирования ширины колец кедр и данные измерений были предложены директором Лимнологического института СО АН СССР чл.-корр. АН СССР Г. И. Галазием. Прогноз при помощи известных алгоритмов МГУА, где регрессоры имеют первую степень, был неудачным по точности. Только разработка нового нелинейного алгоритма МГУА с оптимизацией степени регрессоров помогла значительно повысить точность прогнозов [42].

каждого ранга, согласно теореме Уидроу, выбиралась так, чтобы в каждый ранг попало приблизительно равное число точек измерений*.

Коэффициент ранговой корреляционной функции ширины годовых колец, определяемой по К. Спирмену [47],

$$R = 1 - 6 \sum_{i=1}^N d^2 / (N^3 - N),$$

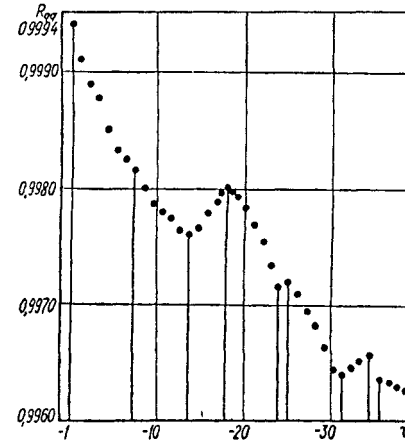


Рис. 2.3. Ранговая корреляционная функция ширины годовых колец кедр $R_{qq}(\tau)$

где d — разность рангов; N — число точек.

Кривая ранговой корреляционной функции показана на рис. 2.3. Экстремумы кривой показывают эффективное множество факторов: $q_1 = x_{-1}$; $q_2 = x_{-8}$; $q_3 = x_{-14}$; $q_4 = x_{-18}$; $q_5 = x_{-24}$; $q_6 = x_{-25}$; $q_7 = x_{-31}$; $q_8 = x_{-35}$; $q_9 = x_{-39}$.

Оптимизация степени факторов. На первом этапе используется мультипликативный алгоритм МГУА [23], т. е. прогноз ищется в виде ковариаций факторов в некоторой степени, подлежащей определению по комбинаторному алгоритму МГУА. Полный полином комбинаторного алгоритма МГУА берут в виде следующего произведения:

$$q = a_0 q_1^{k_1} q_2^{k_2} q_3^{k_3} q_4^{k_4} q_5^{k_5} q_6^{k_6} q_7^{k_7} q_8^{k_8} q_9^{k_9}.$$

Логарифмируя, получаем $\ln q = \ln a_0 + k_1 \ln q_1 + k_2 \ln q_2 + k_3 \ln q_3 + k_4 \ln q_4 + k_5 \ln q_5 + k_6 \ln q_6 + k_7 \ln q_7 + k_8 \ln q_8 + k_9 \ln q_9$.

Далее действует комбинаторный алгоритм: по очереди во всевозможных комбинациях исключаются те или иные слагаемые полного полинома, а полученные таким образом частные полиномы оцениваются по двум критериям: $R_1 R_2 = \Delta^2(C_1)$ — точности краткосрочного прогноза (определяется на выборке) C_1 ; $n_{\text{см}}^2$ — минимума смещения (определяется на выборках A и B). Комбинированный критерий

$$\rho_1 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(C_1)} \rightarrow \min.$$

Глубина минимума комбинированного критерия является мерой эффективности модели [24]. Неизвестные параметры $\ln a$; $k_1 - k_9$ находятся после определения структуры модели на выборке $A + B$ по методу наименьших квадратов.

Несколько самых эффективных ковариаций $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, структура и степени которых уже известны, ранжируются по величине минимума комбинированного критерия, как показано на рис. 2.4. Приведем пять наиболее точных моделей:

$$z_1 = q_{-8}^{0,430072}; \quad R_1 R_1 = \Delta^2(C_1) = 0,102; \quad n_{\text{см}}^2 = 0,008; \quad \rho_1 = 0,3317;$$

$$z_2 = q_{-8}^{0,437934} q_{-39}^{-0,069124}; \quad R_1 R_1 = \Delta^2(C_1) = 0,106; \quad n_{\text{см}}^2 = 0,068; \quad \rho_1 = 0,4172;$$

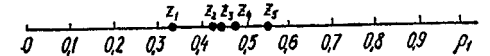


Рис. 2.4. Ранжирование мультипликативных моделей по оси комбинированного критерия

* Принято следующее разделение значений выходной величины на уровни (ранги): 1) 0,3—0,55, 2) 0,58—0,63, 3) 0,65—0,68, 4) 0,7—0,75, 5) 0,78—0,83, 6) 0,85—0,9, 7) 0,93—1, 8) 1,03—1,08, 9) 1,1—1,18, 10) 1,2—1,3, 11) 1,35—1,53, 12) >1,6. Прогноз уровня является примером интервального прогноза.

$$z_3 = q_{-8}^{0,437934} q_{-39}^{-0,069124}, \quad R_1 R_1 = \Delta^2(C_1) = 0,103; \quad n_{cm}^2 = 0,081; \quad \rho_1 = 0,4290;$$

$$z_4 = q_{-8}^{0,479110} q_{-14}^{0,068059} q_{-24}^{0,080822} q_{-25}^{-0,084151}, \quad R_1 R_1 = \Delta^2(C_1) = 0,139, \quad n_{cm}^2 = 0,094,$$

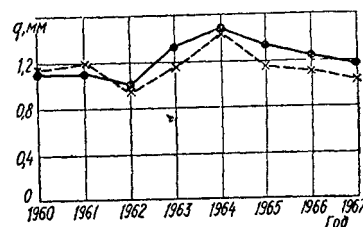
$$\rho_1 = 0,4827;$$

$$z_5 = q_{-8}^{0,439335} q_{-25}^{-0,013455} q_{-39}^{0,663188}, \quad R_1 R_1 = \Delta^2(C_1) = 0,102; \quad n_{cm}^2 = 0,194; \quad \rho_1 = 0,5441.$$

Самоорганизация обобщенной мультипликативно-аддитивной модели. Для получения модели в виде суммы ковариаций с нецелыми степенями факторов и их произведений используется обычный однорядный (комбинаторный) алгоритм МГУА. Произведения позволяют уточнить оптимальное значение степени факторов

Полный полином (модель максимальной сложности) содержит пять наиболее эффективных мультипликативных факторов, выбранных

Рис. 2.5 Кривая прогноза изменения ширины годовых колец кедр



на первом этапе, и десять их произведений (всего пятнадцать слагаемых): $q_0 = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 + a_5 z_5 + a_6 z_1 z_2 + a_7 z_1 z_3 + \dots + a_{15} z_4 z_5$.

Критерии выбора модели оптимальной сложности указаны выше. В результате была выбрана структура обобщенной модели в следующем виде:

$$q_0 = 34,7593z_3 - 32,9154z_4 - 33,9025z_{10} + 32,3747z_{11} + 1,9363z_{15};$$

$$R_2 R_2 = \Delta^2(C_2) = 0,506, \quad n_{cm}^2 = 0,023; \quad \rho_2 = 0,724,$$

$$\text{где } z_3 = q_{-8}^{0,437954} q_{-39}^{-0,069124},$$

$$z_4 = q_{-8}^{0,439335} q_{-25}^{-0,013455} q_{-39}^{0,663188},$$

$$z_{10} = z_3 z_4 = q_{-8}^{0,917044} q_{-14}^{0,063059} q_{-24}^{0,080822} q_{-25}^{-0,084151} q_{-39}^{-0,069124},$$

$$z_{11} = z_4 z_5 = q_{-8}^{0,918445} q_{-14}^{0,068059} q_{-24}^{0,080822} q_{-25}^{-0,097606} q_{-39}^{-0,066318},$$

$$z_{15} = z_2 z_5 = q_{-8}^{0,866355} q_{-24}^{0,024878} q_{-25}^{-0,013455} q_{-39}^{-0,066319}.$$

Кривая прогноза, полученного по модели, показана на рис. 2.5. Время упреждения прогноза было принято равным восьми годам. Предельно допустимое время упреждения прогноза не определялось

Алгоритм в случае планирования эксперимента. Выше рассмотрен случай получения авторегрессионной модели при пассивном наблюдении моделируемого объекта (сибирского кедр). Для многих других объектов возможна постановка специальных экспериментов для получения множественно-регрессионных моделей.

Планы снятия данных определяются тем, какие из факторов и их ковариаций поддерживаются в процессе эксперимента на постоянном уровне: $x_1 = \text{const}$; $x_2 = \text{const}$; ...; $x_n = \text{const}$; $x_1 x_2 = \text{const}$; $x_1 x_3 = \text{const}$; ...; $x_{n-1} x_n = \text{const}$. Для каждого плана эксперимента получается своя мультипликативная модель с нецелыми степенями аргументов.

Общая модель объекта синтезируется в результате наложения (суммирования) всех частных моделей, полученных при экспериментах. Так получается полный полином, исходный для последующего применения однорядного (комбинаторного) алгоритма МГУА. Планирование эксперимента позволяет повышать точность и помехоустойчивость моделирования [48, 90].

Алгоритм с выделением остатков. Выше было выбрано $F = 5$ лучших мультипликативных моделей, используемых в качестве регрессоров. При переходе к обобщенной модели степени факторов, образующих регрессоры, подлежат уточнению. Такое уточнение достигается при помощи включения в полный полином произведений, как было показано выше.

Шире возможности (в смысле уточнения степени факторов) у алгоритма с выделением остатков. В этом алгоритме последовательно наращивается число слагаемых. Каждое новое слагаемое получается при помощи мультипликативного алгоритма по данным остатка. При этом находится первая модель — эффективная ковариация факторов с нецелыми в общем случае степенями. Вычисляется первый прогноз. Затем по исходным данным при помощи вычитания из исходной величины данных прогноза находится первый остаток. Определяется вторая мультипликативная модель — модель первого остатка. Находится второй остаток и т. д. Сумма мультипликативных моделей дает искомую обобщенную модель. При составлении условных уравнений точки, где остатки отрицательны, просто пропускаются. Так можно избежать затруднения, связанного с логарифмированием отрицательных величин.

2.2.3. МНОГОРЯДНЫЕ АЛГОРИТМЫ МГУА

В соответствии с принципом самоорганизации моделей на первом ряду образуются частные модели, попарно учитывающие аргументы:

$$y_i^1 = \varphi(u_i, u_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m; \\ j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad \text{при } i \neq j,$$

где $\varphi(\dots)$ представляет собой определенные опорные функции, чаще всего полиномы (рис. 2.6). Для k -го ряда выбранные в предыдущем ряду r моделей снова попарно комбинируются, т. е.

$$y_s^k = \varphi(y_i^{k-1}, y_j^{k-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, r; \\ j = 1, 2, 3, \dots, r, \quad \text{при } i \neq j.$$

В большинстве программ выбирают $m_1 = m_2 = \dots = m_r = F$, где F устанавливает свободу выбора решений.

Были выполнены исследования по оптимальному выбору значения свободы выбора по рядам селекции $F = f(k)$, где k соответствует k -му ряду, что аналогично определению оптимальной структуры

перцептрона [65, 69]. При этом существенные отличия алгоритма МГУА от алгоритма перцептрона следующие:

вычисление коэффициентов частных моделей по методу наименьших квадратов на обучающей последовательности (вместо их адаптации по алгоритмам стохастической аппроксимации);

оптимальный выбор порогового значения;

отбор моделей по целесообразно выбранным эвристическим критериям (вместо критерия вида скалярного произведения).

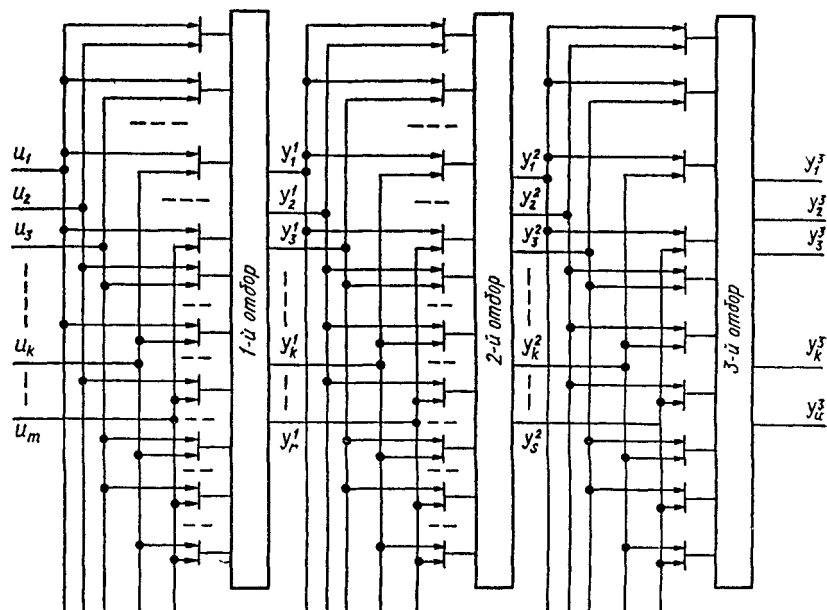


Рис. 2.6. Структурная схема многорядного алгоритма МГУА

Различные многорядные алгоритмы группового учета аргументов различаются по виду используемых опорных функций. Чаще других применяются алгебраические полиномы и разностные аналоги дифференциальных уравнений. Применяются гармонические функции и формулы Байеса (вероятностные алгоритмы МГУА [39]). В многорядных алгоритмах МГУА сложность модели растет от ряда к ряду, причем из-за порогового отбора некоторое число частных моделей теряется, а отбирается m лучших моделей, где m — свобода выбора по Д. Габору. В оптимальном (по объему счета) случае частные модели линейные, содержат два аргумента, т. е. в каждом ряду реализуется полная попарная комбинация из m аргументов, выбранных при помощи селекции. При этом число частных моделей каждого ряда равно C_m^2 .

При составлении алгоритмов в общем случае определяют число точек интерполяции n на обучающей A и проверочной B последователь-

ностях ($n = N_A + N_B$); число аргументов, используемых в каждом ряду; вид и число коэффициентов частных моделей L .

Применяются следующие виды частных описаний:

линейные $y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j$;

билинейные $y = a_1x_i + a_2x_jx_i$ при $x_i = 1$ [92];

квадратичные $y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2$.

2.2.3.1. Многорядный алгоритм МГУА с вычислением матрицы.

Чтобы облегчить трудоемкость вычислений, связанных с перебором большого числа вариантов модели, для решения алгебраических уравнений можно применить метод, основанный на вычислении собственного значения информационной матрицы [92]. В этом случае вместо многократного составления и решения системы нормальных уравнений, необходимого при алгоритмах самоорганизации, требуется лишь однократное вычисление матрицы собственных векторов. Эффективную возможность формирования нелинейных алгебраических моделей дает следующая методика. В i -м ряду получают j -ю модель в виде уравнения

$$y_{ij} = a_{ij} + b_{ij}u_{j,i,j-1} + c_{ij}y_{i-1,j},$$

где $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, m$. При этом есть возможность в m рядах построить для m переменных полином m -й степени

$$y_{mm} = \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \sum_{k_3=0}^{m-k_1-k_2} \dots \sum_{k_{m-1}=0}^{m-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}} a_l \prod_{l=1}^{m-k_l} u_l,$$

где $j = 0, 1, \dots, C_{2m-1}^m$.

Ниже в качестве примера приведены частные модели, которые получены для выходной величины [92]. Для сокращения времени счета в каждом ряду выбирается только $m = 3$ лучших моделей:

1-й ряд селекции

$$y_{11} = a_{11} + b_{11}v_1 = f_{11}(v_1);$$

$$y_{12} = a_{12} + b_{12}y_{11}v_1 = f_{12}(v_1, v_1^2);$$

$$y_{13} = a_{13} + b_{13}y_{12}v_1 = f_{13}(v_1, v_1^3);$$

2-й ряд селекции

$$y_{21} = a_{21} + b_{21}v_2 + c_{21}y_{11} = f_{21}(v_1, v_2);$$

$$y_{22} = a_{22} + b_{22}y_{21} + c_{22}y_{12} = f_{22}(v_1, v_2, v_1^2, v_2^2, v_1v_2);$$

$$y_{23} = a_{23} + b_{23}y_{22}v_2 + c_{23}y_{13} = f_{23}(v_1, v_2, v_1v_2, v_1^2, v_2^2, v_1^3, v_2^3, v_1v_2^2, v_1^2v_2);$$

3-й ряд селекции

$$y_{31} = a_{31} + b_{31}v_3 + c_{31}y_{21} = f_{31}(v_1, v_2, v_3);$$

$$y_{32} = a_{32} + b_{32}b_{31}v_3 + c_{32}y_{22} = f_{32}(v_1, v_2, v_3, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_2, v_1^2, v_2^2, v_3^2);$$

$$y_{33} = a_{33} + b_{33}y_{32}v_3 + c_{33}y_{23} = f_{33}(v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_2v_3, v_1^2v_2^2v_3^2, v_1^3, v_2^3, v_3^3, v_1v_2^2, v_1^2v_3, v_1^2v_3, v_2^2v_3, v_2v_3^2, v_1v_3^2).$$

Следует отметить алгоритмы последовательного выделения трендов, при использовании которых получают хорошие результаты, особенно при выборках очень малого объема. Модель получается в виде

$$y^M = f_1 + \Delta_1 + \sum_{i=2}^R (\Delta_i^1 + \Delta_i^2),$$

где

$$\Delta_1 = y - f_1;$$

$$\Delta_i^1 = y - \left(f_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (\Delta_j^1 + \Delta_j^2) \right);$$

$$\Delta_i^2 = y - \left(f_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (\Delta_j^1 + \Delta_j^2) + \Delta_i^1 \right);$$

$$f_1 = \sum_{k=0}^L a_k u_r^k \quad \text{и} \quad \Delta = \sum_{k=0}^L b_k u_r^k$$

представляют собой степенные полиномы оптимальной сложности; $1 \leq r \leq m$; $1 \leq L \leq s$; s — наибольшая степень; R — наибольшее число рядов. Соответственно изменяется окончательное регрессионное уравнение.

2.2.3.2. *Многорядный алгоритм со случайным выбором пар переменных.* Часто приходится отказываться от учета полного числа пар переменных и в соответствии с методом массовой селекции применять случайный выбор пар. При этом в общем случае попарно реализуются k случайных комбинаций элементарных моделей. Вместо алгоритма

$$m \rightarrow C_m^2 \rightarrow m \rightarrow C_m^2 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

при случайном комбинировании получаем алгоритм

$$m \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow K \rightarrow \dots \rightarrow 1, \quad \text{где} \quad K \ll C_m^2.$$

Так, в результате применения случайного отбора пар при самоорганизации модели технологического процесса производства метилхлорсилана была получена зависимость $p(\sigma_B) = f(k)$, показанная на рис. 2.7, которая оказалась почти одинаковой при различных делениях таблицы данных на обучающую и проверочную последовательности. При данном алгоритме задача количественной оценки возможного уменьшения числа образующихся попарных комбинаций является стохастической. Через $p(\sigma_B)$ или $p(\sigma_N)$ обозначается наиболее вероятное

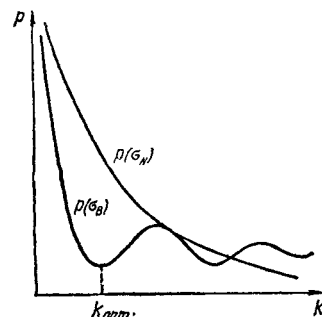


Рис. 2.7. Зависимость вероятных значений среднеквадратичных отклонений p от числа выбираемых переменных k

значение среднеквадратичного отклонения на проверочной σ_B или всей σ_N выборке, получающееся после применения самоорганизации. Эти вероятности являются оценками объективности выбора модели.

Указанные выше предельно допустимые количества аргументов (20, 100 и 1 000 переменных) определяют время счета на машине БЭСМ в течение 1 ч, причем в качестве многорядного используется алгоритм со случайным выбором партнеров [39], т. е. наиболее объемный многорядный алгоритм МГУА. Другие многорядные алгоритмы позволяют учесть около 300 аргументов (точнее 300 слагаемых в полном развернутом полиноме). Для линейного полинома число слагаемых равно числу переменных, если не учитывать наличие свободного члена.

2.2.3.3. *Многорядный алгоритм с вычислением остатков.* На первом ряду отбирается некоторое количество F_1 частных описаний, содержащих m_0 существенных аргументов вида

$$f_{1j} = \sum_{k=0}^L a_k x_j^k$$

для $1 \leq j \leq m_0$ и $0 \leq L \leq s$. Частные описания (модели) первого ряда оцениваются и ранжируются по величине среднеквадратичной ошибки на отдельной проверочной выборке данных. Для лучших (по значению критерия) моделей можно по всем наблюдениям вычислить первые разности $\Delta_{1i} = y - f_{1i}$, для которых опять можно определить m_0 существенных аргументов x_j при $i = j$ и получить соответствующие модели оптимальной сложности

$$\Delta_{1i}^M = \sum_{k=0}^L b_k x_j^k,$$

где $1 \leq j \leq m_0$, $0 \leq L \leq s$, которые опять ранжируются в соответствии со среднеквадратичной ошибкой на проверочной выборке. Меньшие по значению среднеквадратичные отклонения на проверочной выборке соответствуют лучшим моделям первого ряда:

$$y^M = \sum_{k=0}^{L_1} a_k x_j^k + \sum_{k=0}^{L_2} b_k x_r^k, \quad 0 \leq L_1, \quad L_2 \leq s; \quad i \neq r.$$

На последующих рядах для полученных аналогично разностей $\Delta = y - y^M$ находятся существенные аргументы, причем выделение трендов продолжается до тех пор пока получается улучшение аппроксимации на проверочной выборке.

Алгоритмы с вычислением остатков имеют то преимущество, что с их помощью можно непосредственно узнать, улучшает ли включение новых переменных прогноз, уже полученный с помощью заданного множества переменных. В отличие от обычных алгоритмов МГУА (без вычисления остатков), имеющих минимум, точность критерия в алгоритмах с вычислением остатков с каждым рядом селекции уменьшается. Следовательно, алгоритмы с вычислением остатков приводят

к более субъективным результатам, так как приходится выбирать модель оптимальной сложности по правилу левого угла.

Установлено, что все виды многорядных алгоритмов МГУА могут либо предусматривать выделение остатков (разностей) после каждого ряда селекции, либо действовать без выделения остатков. Например, многоступенчатый алгоритм В. С. Степашко [76], позволяющий увеличить предельные возможности однорядного перебора, можно рассматривать как описываемый здесь алгоритм последовательного выделения трендов, но без операции выделения остатков (см. разд. 2.2.2).

2.2.3.4. Учет числа степеней свободы в многорядном алгоритме с передачей списков переменных. При жесткой структуре частных моделей и наличии $n_A > k_0$ точек в каждом ряду возможна оценка коэффициентов модели, где k_0 — число параметров частной модели (например, у линейной модели $k_0 = 3$). В этом случае коэффициенты не являются оптимальными в смысле метода наименьших квадратов, что может снизить эффективность процедуры селекции [71]. Поэтому число максимально возможных рядов m рекомендуется выбирать так, чтобы число точек обучающей последовательности $n_A > k_m$, где k_m — число степеней свободы, необходимое для получения на m -м ряду полной модели. Частные модели содержат k_0 параметров, которые вычисляются в соответствии с методом наименьших квадратов на обучающей последовательности решением системы из k_0 нормальных уравнений Гаусса. При этом в каждом ряду используется k_0 степеней свободы. Ввиду того что все входящие в частные модели аргументы являются результатом вычислений предыдущих рядов, для моделей на m -м ряду получается число степеней свободы [53]

$$k_m = k_0 \sum_{i=0}^m 2^i.$$

2.2.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ВЫДЕЛЕНИЕ ТРЕНДОВ С ПРОВЕРКОЙ СТАЦИОНАРНОСТИ ОСТАТКА

Нестационарный моделируемый процесс часто можно представить в виде суммы полиномиальной или гармонической составляющей и некоторого случайного остатка (разности). Детерминированная составляющая, в свою очередь, может быть суммой двух или большего числа трендов. Операция выделения трендов записывается так:

$$\Delta z(t) = \nabla_1 z(t), \quad \text{или} \quad \Delta z(t) = \nabla_1 \nabla_3 z(t),$$

где ∇_1 — знак (оператор) выделения одной разности; ∇_1, ∇_3 — оператор выделения двух трендов (например, первой и третьей гармоник процесса). Если остаток $\Delta z(t)$ удовлетворяет условиям стационарности, т. е. среднее значение остатка постоянно $\overline{\Delta z(t)} = \text{const}$ и дисперсия остатка постоянна $D_{\Delta z} = \text{const}$, то алгоритмы МГУА следует

применить только для прогнозирования остатка. Общий прогноз процесса будет равен сумме тренда и прогноза остатка.

Тренд (сумма трендов), обеспечивающий (обеспечивающих) минимум критерия селекции, называется трендом оптимальной сложности.

Пример 8. Прогноз качества воды в Средней Эльбе. Ввиду того что содержание кислорода является важной характеристикой качества воды, решение данной задачи было ограничено прогнозом содержания кислорода. Изменение концентрации содержания кислорода в проточных водоемах определяется, в основном, физическими

4. Модель для прогноза содержания кислорода

№ слагаемого	Модель $z_t = \Delta(\Delta y(t)) =$	№ слагаемого	Модель $z_t = \Delta(\Delta y(t)) =$	№ слагаемого	Модель $z_t = \Delta(\Delta y(t)) =$
1	$= -0,9402 z_{t-1}$	10	$= -1,3394 z_{t-10}$	19	$= -0,6099 z_{t-19}$
2	$= -1,0659 z_{t-2}$	11	$= -1,2577 z_{t-11}$	20	$= -0,5324 z_{t-20}$
3	$= -1,0643 z_{t-3}$	12	$= -1,1653 z_{t-12}$	21	$= -0,4136 z_{t-21}$
4	$= -1,1947 z_{t-4}$	13	$= -1,1089 z_{t-13}$	22	$= -0,3292 z_{t-22}$
5	$= -1,3148 z_{t-5}$	14	$= -1,0132 z_{t-14}$	23	$= -0,2505 z_{t-23}$
6	$= -1,3294 z_{t-6}$	15	$= -0,9239 z_{t-15}$	24	$= -0,1993 z_{t-24}$
7	$= -1,1871 z_{t-7}$	16	$= -0,8279 z_{t-16}$	25	$= -0,0778 z_{t-25}$
8	$= -1,2956 z_{t-8}$	17	$= -0,6837 z_{t-17}$	26	$= -0,0919 z_{t-26}$
9	$= -1,2749 z_{t-9}$	18	$= -0,6491 z_{t-18}$		

и биологическими процессами (движение воды, дисперсия света и температуры, продукция органического вещества, обмен веществ, образование метаболитов).

Для аналитического описания важнейших процессов, связанных с генерированием и потреблением кислорода, предложено много моделей, но содержащиеся в этих аналитических моделях коэффициенты нужно оценивать по методу наименьших квадратов и по наблюдениям большой длительности.

В гидрологической практике не всегда имеются такие длительные наблюдения и, кроме того, трудоемкость аналитического интегрирования уравнений и вычисления значений прогноза слишком велики. Объем необходимых вычислений часто превосходит

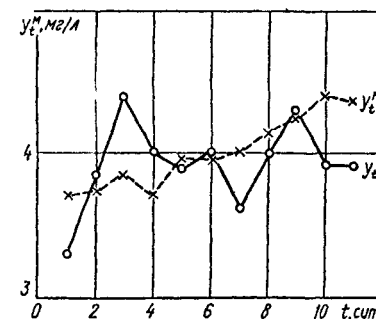


Рис. 2.8 Кривые качества воды в р. Эльба:

y_t — фактические, y_t^M — прогноз

вычислительные возможности машин, имеющихся на контрольных станциях. Для того чтобы обеспечить практическое использование математических моделей, нужно строить сравнительно простые модели (системы линейных разностных уравнений) с участием величин, легко поддающихся измерению на станциях. Автоматические датчики качества воды характеризуются тем, что измеряемые величины имеют большую плотность объема данных во времени, однако они охватывают лишь некоторые показатели. Детальный анализ сигналов временного ряда показал, что рас-

смагриваемые случайные процессы изменения показателей качества воды являются нестационарными. Поэтому в соответствии с рассмотренным ниже критерием стационарности снова можно рекомендовать выделение трендов с целью получения стационарного процесса изменения последнего остатка

1 Среднесуточные данные. Для содержания кислорода при использовании 353 точек данных получена модель представленная в табл. 4. Изображенная на рис. 2.8

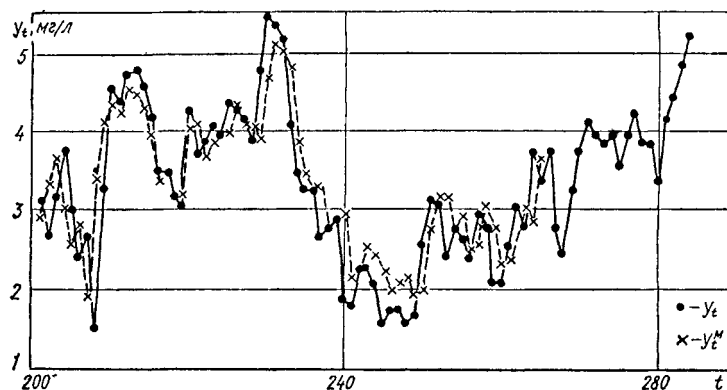


Рис. 2.9. Кривые содержания кислорода:

● — прогноз; × — фактические

кривая прогноза качества воды при сравнении с кривой действительных значений за 10 дней удовлетворяет предъявляемым требованиям (ошибка прогноза менее 10 %). Без выделения разностей (остатков) была получена следующая модель:

$$y_t^M = 0,7581 + 0,8366y_{t-1} - 0,0595y_{t-2} + 0,0415y_{t-3} - 0,0151y_{t-4} - 0,1028u_{1t} + 0,0903u_{1t-1} - 0,0057u_{1t-3}.$$

Кривые фактического содержания кислорода и его прогноз показаны на рис. 2.9. Сравнивая кривые, делаем вывод о том, что прогнозирование при помощи

5. Модели для двухчасовых данных

№ слагаемого	Модель $y_t^M =$	№ слагаемого	Модель $y_t^M =$	№ слагаемого	Модель $y_t^M =$
1	$= -1,0249 y_{t-1}$	6	$= -0,0095 y_{t-6}$	11	$= 0,0128 y_{t-11}$
2	$0,0658 y_{t-2}$	7	$0,0179 y_{t-7}$	12	$0,0209 y_{t-12}$
3	$-0,1306 y_{t-3}$	8	$0,0885 y_{t-8}$	13	$-0,0079 y_{t-13}$
4	$-0,0316 y_{t-4}$	9	$-0,0191 y_{t-9}$	14	$-0,0118 y_{t-14}$
5	$0,0356 y_{t-5}$	10	$-0,1002 y_{t-10}$	15	$-0,0727 y_{t-15}$

выделения тренда процесса и его остатка эффективно при условии стационарности последнего.

2 Средние двух- и трехчасовые данные. Для измерений величин 515 точек, наблюдаемых в течение 2 ч, были получены модели, причем наилучшая аппроксимация получена вообще без выделения тренда (табл. 5). Найденные прогнозы для десяти временных интервалов (т. е. с упреждением 20 ч) удовлетворяют требованиям

практики. Этот период времени, равный однодневному прогнозу, не может быть достаточным для водохозяйственных задач. Время упреждения прогноза двухчасовых данных меньше времени упреждения прогноза суточных значений. Для того чтобы обеспечить детальный и точный прогноз, нужно повторить самоорганизацию модели на каждый предстоящий шаг. При этом на каждом шагу могут получаться совершенно

6. Модели для трехчасовых данных

№ модели	Модель $y_t^M =$
1	1 октября 1974 г. — 20 октября 1974 г. $= 1,44 + 0,986y_{t-1} - 0,199y_{t-2} - 0,007u_{1t} + 0,009u_{1t-1} - 0,174u_{1t-6} - 0,006u_{1t-7} + 0,005u_{1t-5} - 0,003u_{1t-4} + 0,016u_{1t-3} + 0,075u_{1t-8}$
2	21 октября 1974 г. — 13 ноября 1974 г. $= 0,156 + 0,953y_{t-1} - 0,0017y_{t-4} - 0,005y_{t-5} + 0,0086y_{t-6} + 0,0934y_{t-7} + 0,0002y_{t-16} - 0,126y_{t-8} + 0,0117y_{t-9}$
3	14 ноября 1974 г. — 30 ноября 1974 г. $= 2,277 + 0,714y_{t-1} + 0,096y_{t-2} - 0,009y_{t-3} - 0,339u_{1t} + 0,206u_{1t-1} + 0,013u_{1t-15} - 0,465u_{2t} + 10^{-7}u_{3t}$
4	1 декабря 1974 г. — 25 декабря 1974 г. $= 0,212 + 0,912y_{t-1} + 0,003u_{3t-7} - 0,003u_{3t-8} - 0,00006u_{3t-10} + 0,0005u_{3t-11} + 0,0002u_{3t-15} + 0,00002u_{3t-16}$

новые структуры модели. В табл. 6 приведено четыре модели, полученные для средних трехчасовых данных на различных интервалах проверки прогноза с 1 октября 1974 г. по 23 декабря 1974 г. Найденные среднеквадратичные отклонения прогноза составляют 3—5 % среднего содержания кислорода

2.2.4.1. Критерий нестационарности остатка. Процесс может быть представлен в виде суммы степенного тренда и стационарного остатка. Степень тренда следует выбирать так, чтобы остаток возможно полнее удовлетворял критерию стационарности. Решения авторегрессионных разностных уравнений наиболее точно соответствуют стационарным случайным процессам [7]. Иногда удается выделить степенной или гармонический тренд с тем, чтобы остаток соответствовал стационарному процессу. В другом случае требуется выделение еще одного тренда из первого остатка и т. д.

Пусть график процесса, построенный по исходным данным, содержит очевидную периодическую составляющую (например, с периодом $T = 24$ единицам времени). Тогда целесообразно выделить гармониче-

ский тренд с таким периодом. Запишем это в следующей форме:

$$\Delta z(t) = \nabla_{Tz}(t),$$

где $\nabla_{Tz}(t) = z(t+T) - z(t)$ — фильтрующий полином.

Достаточно ли выделить только один тренд с периодом T ? Ответ на этот вопрос дает вычисление критерия нестационарности. Степень стационарности случайного процесса можно оценить по значению критерия нестационарности, который основан на известном в математической статистике соотношении ординат корреляционных функций процессов $\Delta z(t)$ и $z(t)$. В случае стационарности для всех значений аргумента h действительно соотношение

$$R_{\Delta z}(h) = [2R_z(h) - R_z(h-1) - R_z(h+1)] / \{2[1 - R_z(1)]\},$$

где $R_{\Delta z}(h)$, $R_z(h)$ — корреляционная функция процесса соответственно $\Delta z(t)$ и $z(t)$. Используя это соотношение, построим критерий нестационарности, например, в таком виде:

$$s = \sum_h (D(h))^2 \rightarrow \min,$$

где $D(h) = R_{\Delta z}(h) - [2R_z(h) - R_z(h-1) - R_z(h+1)] / \{2[1 - R_z(1)]\}$.

Критерий применяется для оценки степени нестационарности остатка. Если условие $s > s_0$, где s_0 выбирается из опыта (порядка $s_0 = 0,05$), не выполняется ни при каком тренде, то гипотеза о стационарности должна быть отклонена.

Практически функция тренда может быть выбрана при помощи подбора, причем вначале эмпирически задаются видом исходного фильтрующего полинома. Для этого часто достаточно рассмотреть графическое изображение процесса, его некоторой средней линии. Желательно также располагать априорными данными об ожидаемых циклах процесса (квартальные или годовые колебания). Сложность функции тренда (или число выделяемых трендов) постепенно повышают до тех пор, пока критерий стационарности остатка не станет достаточно малым. Тогда алгоритмы МГУА применяются для моделирования остатка, добавляемого к известному уже тренду (или к сумме трендов).

Расчет критерия нестационарности ρ_s . Процесс выражается суммой тренда и остатка в следующем виде:

$$q(t) = X(t) + x(t).$$

Для каждого остатка $x(t)$ и его первой разности $\Delta x(t)$ действительны следующие выражения:

$$\text{cov}_x(h) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [x(t) - \bar{x}][x(t+h) - \bar{x}];$$

$$\text{cov}_{\Delta x}(h) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\Delta x(t) - \Delta \bar{x}][\Delta x(t+h) - \Delta \bar{x}].$$

Из последнего равенства при условии стационарности процесса получается

$$\text{cov}_{\Delta x}(h) = \gamma [2 \text{cov}_x(h) - \text{cov}_x(h+1) - \text{cov}_x(h-1)].$$

Невязка и критерии нестационарности соответственно записываются в виде

$$\Delta_h = \text{cov}_{\Delta x}(h) - \gamma [2 \text{cov}_x(h) - \text{cov}_x(h+1) - \text{cov}_x(h-1)];$$

$$\rho_s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{h=1}^{N-1} \Delta_h^2} \rightarrow \min.$$

Критерий рассчитывается для исходного процесса (при $X(t) = 0$, $\rho_s = 1$) и для ряда остатков, отличающихся по числу гармоник тренда. Сувеличением числа гармоник, образующих тренд, критерий снижается (см. табл. 38).

Пример 9. Прогноз оборота розничной торговли ГДР. По приведенному методу выбора функции трендов и остатков был получен полином $\nabla_{12}\nabla_1$. На рис. 2.10 показана автокорреляционная функция переменной $w_t = \nabla_{12}\nabla_1 y_t$. Это выражение

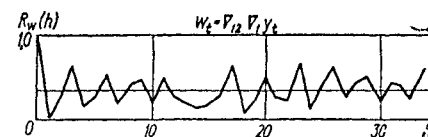


Рис. 2.10. Автокорреляционная функция переменной $w_t = \nabla_{12}\nabla_1 y_t$

показывает, что при определении w_t из переменной y_t был выделен гармонический тренд с периодом 12 мес и, кроме того, полиномиальный тренд. Вследствие быстрого затухания $R_w(h)$ между 0 и 10 можно ожидать хорошей фильтрации. Полученная при этом средняя ошибка прогноза составляет 1,3 % от среднего оборота в 1971 г.

Ввиду того что автокорреляционная функция $\nabla_{12}\nabla_1 y_t$ между $h = 0$ и $h = 9$, а также $h = 17$ и $h = 29$ (рис. 2.10) показывает ярко выраженный трехмесячный цикл, появилась мысль об усложнении алгоритма выделения тренда с целью повышения точности прогноза.

В фильтрующий полином была введена еще одна разность ∇_3 . При этом полином принимает вид $\nabla_{12}\nabla_3\nabla_1$. Временной ряд $w_t = \nabla_{12}\nabla_3\nabla_1 y_t$ оказался стационарным. Полученный с его помощью прогноз (табл. 7) дал дальнейшее улучшение сред-

7. Прогноз оборота розничной торговли ГДР и оценки его точности

Месяц	Прогноз, 10 ⁶ марок	Ошибка по методу		Месяц	Прогноз, 10 ⁶ марок	Ошибка по методу		Месяц	Прогноз, 10 ⁶ марок	Ошибка по методу	
		1	2			1	2			1	2
1971 г.				1972 г.				1973 г.			
Январь	4328	-93,7	141	Январь	4549	235,4	122	Январь	4995	Не оп-	-131
Февраль	4810	-30,6	3	Февраль	5272	195,88	-271	Февраль	5516	ределя-	-319
Март	5710	113,1	2	Март	6242	416,6	-278	Март	6529	лось	-293
Апрель	5555	70,0	-81	Апрель	5442	-279,7	211	Апрель	6012		-158
Май	5342	-129,0	70	Май	5745	34,7	-149	Май	6115		-317
Июнь	5323	-91,5	114	Июнь	5818	159,8	-117	Июнь	6088		-111
Июль	5640	-61,8	4	Июль	5725	-202,9	117	Июль	6164		-120
Август	5463	-96,9	5	Август	5956	162,0	-284	Август	6399		-527
Сентябрь	5516	-47,3	66	Сентябрь	5854	86,7	2	Сентябрь	5928		202
Октябрь	5634	-132,9	99	Октябрь	6019	42,9	-80	Октябрь	6399		-265
Ноябрь	5960	131,9	-225	Ноябрь	6336	233,5	-407	Ноябрь	6708		-774
Декабрь	7274	119,4	-58	Декабрь	7567	-68,9	-85	Декабрь	7744		16

ней ошибки прогноза (до 1,1 % оборота 1971 г.). Оценки коэффициентов модели были определены с помощью поискового метода, что устранило смещение оценок при многошаговом прогнозе. При получении модели вида $y_t = f(y_{t-1}, \dots, y_{t-q})$ с использованием алгоритмов самоорганизации по данным за 1964—1970 гг. было выполнено сравнение нескольких способов нормирования. Выходная величина y_t нормировалась по линейному тренду, по среднему значению и по среднеквадратичному отклонению от него. Наилучшие результаты прогноза получены при нормировании по линейному тренду при квадратичных частных описаниях. Полученный при этом прогноз приведен в табл. 7 (метод 1). Средняя ошибка прогноза для 1971 г. составляет 1,5 % годового оборота.

Эти результаты сравнивались с результатами, полученными с помощью динамического моделирования. Преимущество самоорганизации проявляется при малом числе данных. Так, при 33 опорных точках (данные с октября 1968 г. по июнь 1971 г.) была получена ошибка прогноза менее 2 %. Модель содержит запаздывающие аргументы $y_{t-4}, y_{t-8}, y_{t-11}, y_{t-12}$ при нормировке по кубическому тренду.

Таким образом, действительно, подбором функции тренда можно достичь повышения точности прогноза. В приведенном выше примере модель определялась при заданной функции тренда степенным полиномом.

Зная значения u_1, u_2, u_3 , получаем прогноз для y . С этой целью значение y , полученное для u_1 , нужно корректировать при помощи разностей, полученных для u_2 и u_3 .

Алгоритмы последовательного выделения трендов отличает от метода остатков то, что для выделения каждого тренда используются многорядные алгоритмы МГУА. В каждом ряду выбирают наиболее эффективный аргумент и оптимальную сложность (степень полинома) тренда. Выделение трендов продолжается до тех пор, пока растет регулярность полного решения. Получаемая на проверочной выборке B точность (критерий регулярности), начиная с определенного значения при слишком большом числе выделяемых трендов, падает (трендом здесь называют функцию регрессии одной переменной $f_i(v_i)$). При помощи трендов можно получать как аддитивные модели в виде следующей суммы:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^m f_i(v_i),$$

так и мультипликативные в виде следующего произведения:

$$y = a_0 \prod_{i=1}^m f_i(v_i).$$

Согласно алгоритму последовательного выделения трендов для аддитивных моделей в первом ряду селекции для всех аргументов x_i находят тренды и выбирают F лучших из них, причем оценки коэффициентов получают на обучающей выборке A , а качество трендов (по критерию регулярности) определяют на проверочной выборке данных B . Для всех отобранных трендов находятся остатки $z_i = y - y_i$. Во втором ряду селекции для каждого выбранного тренда вычисляют разность по отношению к наблюдаемым реализациям y (исключение тренда) и опять образуют для этих разностей тренды, из которых также нужно выбрать F лучших функций тренда второго ряда селекции.

Этот процесс можно продолжить до тех пор, пока отклонение на проверочной выборке B не достигнет минимума. Если остаточная дисперсия еще слишком велика, хотя тренды для всех аргументов выделены, то это означает, что алгоритм непригоден для решения данной задачи, так как, например, аргументы недостаточно ортогональны по отношению друг к другу.

2.2.4.2. Метод остатков. Выделение трендов оптимальной сложности можно выполнить, если использовать приведенные в разд. 2.2.1 и 2.2.2 методы. Кроме того, разработаны специальные алгоритмы последовательного выделения трендов, при которых появляются новые

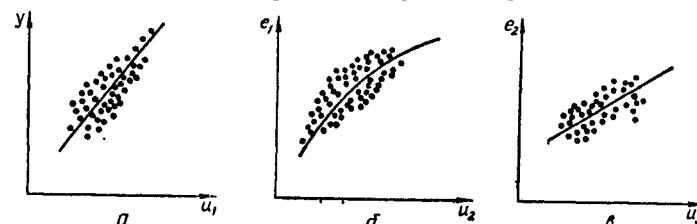


Рис. 2.11. К пояснению метода остатков, применяемого в метеорологии

возможности. Они представляют дальнейшее развитие принятого в метеорологии метода остатков.

Пусть заданы три переменные u_1, u_2, u_3 и прогнозируемая величина y (рис. 2.11). Согласно методу остатков сначала получают функцию регрессии $y = f(u_1)$ (рис. 2.11, а). Затем определяются отклонения e_1 , в зависимости от переменной u_2 в виде функции регрессии $e_1 = f_1(u_2)$ (рис. 2.11, б). И, наконец, находят разность e_2 как функцию от u_3 (рис. 2.11, в): $e_2 = f_2(u_3) + e_3$.

2.2.4.3. Обобщенный алгоритм МГУА предусматривает перебор всевозможных сумм и произведений нескольких трендов. Модель оптимальной сложности (структуры) можно получить либо при помощи полной комбинации всех вариантов (при малом числе аргументов), либо при помощи многорядного процесса селекции. При полном переборе вариантов выходное значение критерия селекции тем меньше, чем лучше опорная функция соответствует искомой зависимости.

Однако расширенный полный перебор всех возможных комбинаций элементарных опорных функций практически можно осуществить лишь при сравнительно малом числе аргументов. Поэтому на первом этапе применяется уже известный алгоритм выделения трендов. Допустим, что в результате применения алгоритмов МГУА с последовательным выделением трендов было получено четыре тренда и временная функция $y = f(t) + f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) + f_4(u_4)$. Обобщенный алгоритм группового учета аргументов предусматривает перебор 12 комбинаций, реализующих следующие функции (полные полиномы):

$$y = f(t) + f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) + f_4(u_4);$$

$$\begin{aligned}
y &= f(t) + f_1(u_1) + f_5(u_2, u_3, u_4); \\
y &= f(t) + f_2(u_2) + f_6(u_1, u_3, u_4); \\
y &= f(t) + f_3(u_3) + f_7(u_1, u_2, u_4); \\
y &= f(t) + f_4(u_4) + f_8(u_1, u_2, u_3); \\
y &= f(t) + f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_9(u_3, u_4); \\
y &= f(t) + f_1(u_1) + f_3(u_3) + f_{10}(u_2, u_4); \\
y &= f(t) + f_1(u_1) + f_4(u_4) + f_{11}(u_2, u_3); \\
y &= f(t) + f_2(u_2) + f_3(u_3) + f_{12}(u_1, u_4);^* \\
y &= f(t) + f_2(u_2) + f_4(u_4) + f_{13}(u_1, u_3); \\
y &= f(t) + f_3(u_3) + f_4(u_4) + f_{14}(u_1, u_2); \\
y &= f(t) + f_{15}(u_1, u_2, u_3, u_4).
\end{aligned}$$

Многофакторные составляющие полных полиномов следует учитывать только в том случае, если известно, что входящие в них аргументы взаимодействуют между собой. Такая априорная информация сокращает объем перебора и повышает его помехоустойчивость. Первый полином соответствует случаю, когда переменные $u_1 \dots u_4$ не взаимодействуют.

Обобщенный алгоритм МГУА позволяет осуществить оптимальное разделение процесса на аддитивные и мультипликативные компоненты. * Практические примеры успешного применения для прогнозирования случайных процессов показывают, что низкочастотные компоненты этих процессов нужно рассматривать как функции одних аргументов, а высокочастотные — как функции других. При этом число аргументов, определяющих низкочастотные компоненты, очень мало, тогда как число аргументов, определяющих высокочастотные компоненты, обычно очень велико.

Теория многорядного обобщенного алгоритма МГУА основана на принципе селекции проекторов [24]. Если функции тренда представляют собой экспоненциальные и тригонометрические функции, то при наличии априорной информации о виде корней характеристического уравнения динамической модели можно достичь существенного повышения помехоустойчивости (снижения чувствительности к помехам). Например, если известно, что действительные части корней равны нулю, то следует применить гармонические алгоритмы МГУА, отличающиеся большой помехоустойчивостью. Обобщенный алгоритм, учитывающий априорную информацию о взаимодействии факторов, также обладает повышенной помехоустойчивостью.

2.2.4.4. Методы ортогонализации частных и полных описаний. В многорядных алгоритмах МГУА после нескольких рядов селекции образуются линейные зависимости используемых на k -м ряду векторов

y_j^{k-1} и при этом информационные матрицы становятся все более плохо обусловленными (сингулярными) (см. подробнее ниже разд. 2.3.7). Чтобы избежать коллинеарности, в каждом ряду в дополнение к отображенным при помощи селекции y_j^{k-1} аргументам можно учитывать аргументы, использованные в первом ряду. Тогда для трех обобщенных аргументов v_1, v_2, v_3 , например, получим 1-й ряд

$$y_1^1 = f(v_1, v_2), \quad y_2^1 = f(v_1, v_3), \quad y_3^1 = f(v_2, v_3);$$

и 2-й ряд

$$\begin{aligned}
y_1^2 &= f(y_1^1, y_2^1), & y_2^2 &= f(y_1^1, y_3^1), & y_3^2 &= f(y_2^1, y_3^1); \\
y_4^2 &= f(y_1^1, v_1), & y_5^2 &= f(y_1^1, v_2), & y_6^2 &= f(y_1^1, v_3); \\
y_{13}^2 &= f(v_1, v_2), & y_{14}^2 &= f(v_1, v_3), & y_{15}^2 &= f(v_2, v_3).
\end{aligned}$$

Другая возможность устранения коллинеарности заключается в применении ортогонализированных аргументов линейных моделей. Вместо обычной частной модели

$$y_i^k = a_0 + a_1 y_{i_1}^{k-1} + a_2 y_{i_2}^{k-1}$$

получаем

$$y_i^k = y_{i_1}^{k-1} + a_2 \hat{y}_{i_2}.$$

Ортогонализация

$$\sum_{i=1}^{n_A} y_{i_1}^{k-1} \hat{y}_{i_2} = 0$$

может быть достигнута при помощи линейного преобразования, при этом

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{i_2} &= y_{i_2}^{k-1} - A y_{i_1}^{k-1}; \\
A &= \sum_{i=1}^{n_A} y_{i_1}^{k-1} y_{i_2}^{k-1} / \sum_{i=1}^{n_A} (y_{i_1}^{k-1})^2.
\end{aligned}$$

Различают два вида использования идеи ортогонализации в МГУА, отличающиеся по числу измерений пространства, в котором происходит ортогональное проектирование векторов.

Изложенный здесь метод соответствует ортогонализации частных описаний многорядных алгоритмов [78, 90]. Алгоритмы могут быть направлены на ортогонализацию полных описаний, получаемых в результате совместного решения системы частных описаний. Сравнение указанных двух алгоритмов ортогонализации по их эффективности еще не проводилось.

* См. прим. 7.

2.3. ВЫБОР ВИДА ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ И КЛАССА УРАВНЕНИЙ

2.3.1. ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ

Для моделирования объекта нужен соответствующий ему язык описаний. Наши статьи, книги и отчеты о научной работе, в которых математика может и отсутствовать, представляют собой, в общем, словесные описания или вербальные модели. Цель математического моделирования — описать отдельные свойства исследуемого объекта в более краткой математической форме [61].

Язык математики по сравнению со словесным описанием является более точным, но его преимущество является одновременно и недостатком при его использовании — менее детализированные и менее точные языки имеют свои преимущества. До сих пор в сложных ситуациях такой, кажущийся менее надежным и неточным аппарат, как словесное описание, является более точным и богатым, чем формулы [18].

В математических моделях могут использоваться различные классы уравнений и виды опорных функций. Уравнения с обычными производными используют для разработки так называемых моделей с сосредоточенными параметрами, для которых все данные измерены в одной точке пространства. Описания в классе дифференциальных уравнений с частными производными находят применение в пространственных моделях, например, для описания физических полей. В таблице наблюдений при этом содержатся замеры, сделанные во многих точках пространства. Разностные уравнения являются дискретным аналогом дифференциальных уравнений с непрерывными производными.

Интегро-дифференциальные уравнения могут содержать так называемые разрывные решения, их можно применять для представления резких качественных изменений в объекте. Если процесс содержит внезапные изменения, то объект моделирования лучше всего описывать при помощи интегро-дифференциальных уравнений. Поэтому при использовании для моделирования разностных уравнений рекомендуется предлагать ЭВМ также сумму наблюдений (дискретный аналог интеграла). Часто оказывается, что ЭВМ выбирает для модели интегральные члены, иногда они отбрасываются как излишние (см. также разд. 3.3.4.1).

Исключительно важным является разделение опорных функций по интервалу усреднения переменных. Во всех приведенных выше опорных функциях используются самые различные усреднения переменных во времени. Например, дифференциальные уравнения составляют для мгновенных значений переменных. Усредненные значения за день, за месяц, за квартал, а также средние годовые значения входят в разностные уравнения. Чем больше интервал усреднения, тем более размытым (менее детализированным) становится язык моделирования, по своим свойствам приближаясь к языкам словесных описаний (см. гл. 4).

Палитра форм описания была бы неполной, если бы не упомянуть о вероятностно-теоретических моделях, например, используемых в

многорядной теории статистических решений [39] для вычисления удельного риска. В многорядных вероятностных алгоритмах МГУА используются постепенно усложняющиеся выражения, подобные формуле Байеса и удельного риска.

Таким образом, алгоритм МГУА может быть реализован на различных опорных функциях (математических языках).

2.3.2. ВЫБОР ПОЛНЫХ И ЧАСТНЫХ ОПИСАНИЙ

Очевидно, успех самоорганизации модели в значительной мере зависит от выбора класса опорных функций. Если опорные функции таковы, что структура объекта не может быть восстановлена при помощи комбинации частных моделей, то задача аппроксимации все же решается, но при этом получается результат, часто пригодный только для прогнозирования. Полученная в этом случае модель непригодна для идентификации объекта, так как она не является физической моделью объекта.

Задача выбора описания разрешима, если класс опорных функций выбрать достаточно общим. При самоорганизации математических моделей на ЭВМ, в принципе, можно возложить выбор опорных функций, основной структуры полных и частных моделей. Имеющаяся априорная информация позволяет, в общем, ограничиться несколькими немногими видами опорных функций и получаемыми на их основе структурами



Рис. 2.12. К пояснению выбора вида опорных функций

моделей. В процессе самоорганизации ЭВМ при помощи перебора вариантов выбирает оптимальный вид опорной функции и класс уравнений.

Чаще графическое представление процесса позволяет сделать правильный выбор опорных функций. Например, для стационарных колебаний со средним значением, тождественно равным нулю (рис. 2.12, а), можно рекомендовать тригонометрические функции. Для процессов, показанных на рис. 2.12, б, необходимо сначала исключить полиномиальный тренд, а остаток можно описать тригонометрическими функциями. Для монотонного процесса (рис. 2.12, в) рекомендуется описание при помощи полиномиального тренда.

Тригонометрические функции, степенные полиномы и т. д. могут быть получены как решения соответствующего дифференциального

или разностного уравнения, поэтому для моделирования можно применять также дифференциальные уравнения или их конечно-разностные аналоги.

2.3.3. ОПОРНЫЕ ФУНКЦИИ МГУА

2.3.3.1. Функции тренда. Математическое описание динамического объекта может быть представлено либо его дифференциальным (или интегро-дифференциальным) уравнением, либо решением этого уравнения. Низкочастотная (сглаженная) часть решения называется функцией тренда и представляет решение уравнения динамики в виде

$$y(t) = h(\underline{u}, s, t),$$

или при соответствующих допущениях

$$y(t) = f(t, \underline{c}) + s(t),$$

где $s(t)$ — аддитивная помеха. Функция тренда $f(t, \underline{c})$ может быть аппроксимирована некоторой системой опорных функций:

$$f(t, \underline{c}) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t)$, в свою очередь, является опорной функцией.

При самоорганизации, в частности, в алгоритмах выделения трендов находят применение следующие опорные функции.

1. Степенные полиномы

$$\varphi_i(t) = t^i$$

для построения модели

$$y(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i.$$

2. Тригонометрические функции

$$\varphi_{2i}(t) = \cos \omega_i t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$\varphi_{2i-1}(t) = \sin \omega_i t$$

для образования модели

$$y(t) = \sum_{i=0}^m c_i \cos \omega_i t + \sum_{i=0}^m d_i \sin \omega_i t.$$

3. Экспоненциальные функции

$$\varphi_i(t) = e^{\beta_i t}$$

для построения модели

$$y(t) = \sum_{i=0}^m c_i e^{\beta_i t}.$$

Если в систему опорных функций одновременно включается несколько типов, то получаются смешанные функции, содержащие сумму или произведение степенных полиномов и экспоненциальных функций.

Нелинейные слагаемые можно переобозначить новыми обобщенными переменными $v_i = \varphi_i(t)$. При этом получим линейные уравнения регрессии, структура которых и оценки коэффициентов легко уточняются с помощью алгоритмов МГУА.

При моделировании экономики целесообразно применять, особенно для описания так называемых производственных функций, отображающих связь между взаимозаменяемыми производственными факторами, выражения с обобщенными и нормированными аргументами

$$v_i = \bar{u}_{i,t-p} \quad \text{и} \quad v_k = \bar{u}_{k,t-p}.$$

Если использовать такие опорные функции, то с помощью самоорганизации можно образовать следующую общую модель:

$$y(t) = e^{Bh(t)} \prod_{i \in J} u_i^{B_i h_i(t)/[h_i(t)]} (t - k_i),$$

где $h(t)$ и $h_i(t)$ — полиномы, описывающие функции тренда факторов $y(t)$ и $u_i(t - k_i)$ при соответствующей нормировке; $J = \{(j_i; k_i)\}$ — множество пар (j_i, k_i) , которое указывает, какие факторы $u_{j_i, t-k_i}$; $1 \leq j_i \leq m$; $0 \leq k_i \leq K$ существенны.

В некоторых случаях возникает необходимость моделирования нелинейных зависимостей (например, в виде дробно-рациональных функций). Такая зависимость для двух воздействий будет иметь следующий вид:

$$y = (a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1 u_2) / (1 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_1 u_2).$$

Для самоорганизации модели могут быть использованы дробно-полиномиальные опорные функции. Постепенное повышение сложности таких функций показано в табл. 8. Оценки коэффициентов дробно-рациональных функций могут быть определены при помощи итерационной процедуры [21].

2.3.3.2. Описание остатка при помощи разностных уравнений. Общей моделью динамического объекта являются уравнения состояния, которые в разностном виде могут быть заданы следующим образом:

$$x_{t+1} = F(\underline{x}_t, \underline{u}_t, t),$$

при этом принимается, что одна из переменных состояния соответствует выходной величине.

Условием самоорганизации уравнений состояния, удобных для пошагового прогноза, является наблюдаемость всех m компонент вектора состояния. Соответственно получается $(m + 1)$ уравнение вида

$$\underline{x}_{t+1} = g(\underline{v}_t),$$

где $\underline{v}_t = (\underline{x}_t, \underline{u}_t, t)$.

8. Постепенное усложнение моделей-претендентов дробно-полиномиального вида (при двух факторах)

x	y	xy	$1/x$	$1/y$
$z_1 = a_0 + a_1x$	$z_2 = a_0 + a_1y$	$z_4 = a_0 + a_1xy$	$z_8 = \frac{a_0}{1 + b_1x}$	$z_{16} = \frac{a_0}{1 + b_1y}$
	$z_3 = a_0 + a_1x + a_2y$	$z_5 = a_0 + a_1x + a_2xy$	$z_9 = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x}$	$z_{17} = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1y}$
		$z_6 = a_0 + a_1y + a_2xy$	$z_{10} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + b_1x}$	$z_{18} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + b_1y}$
		$z_7 = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	$z_{11} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1x}$	$z_{19} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1y}$
			$z_{12} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1x}$	$z_{20} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1y}$
			$z_{13} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1x}$	$z_{21} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1y}$
			$z_{14} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1x}$	$z_{22} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1y}$
			$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$
			$z_{15} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1x}$	$z_{23} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1y}$

Продолжение табл. 8

$1/(x + y)$	$1/(xy)$	$1/(x + xy)$	$1/(y + xy)$	$1/(x + y + xy)$
$z_{24} = \frac{a_0}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{32} = \frac{a_0}{1 + b_1xy}$	$z_{40} = \frac{a_0}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{48} = \frac{a_0}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{56} = \frac{a_0}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$z_{25} = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{33} = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1xy}$	$z_{41} = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{49} = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{57} = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$z_{26} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{34} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + xy}$	$z_{42} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{50} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{58} = \frac{a_0 + a_1y}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$z_{27} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{35} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1xy}$	$z_{43} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{51} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{59} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$z_{28} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{36} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1xy}$	$z_{44} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{52} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{60} = \frac{a_0 + a_1xy}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$z_{29} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{37} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1xy}$	$z_{45} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{53} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{61} = \frac{a_0 + a_1x + a_2xy}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$z_{30} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1x + b_2y}$	$z_{38} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1xy}$	$z_{46} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{54} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{62} = \frac{a_0 + a_1y + a_2xy}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$
$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$	$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$
$z_{31} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1x + b_2y + b_3y}$	$z_{39} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1xy}$	$z_{47} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1x + b_2xy}$	$z_{55} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1y + b_2xy}$	$z_{63} = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{1 + b_1x + b_2y + b_3xy}$

В общем случае, однако, некоторые компоненты вектора состояния будут либо промежуточными (вспомогательными), либо ненаблюдаемыми. Исключая такие переменные, получают уравнения для наблюдаемых компонент

$$\tilde{x}_{i+1} = f(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i-1}, \dots, \tilde{x}_{i-k}, u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-k}, t),$$

которые могут быть дифференциальными уравнениями высших порядков. В результате исключения промежуточных переменных в системе частных моделей получается общая развернутая модель, содержащая число слагаемых больше, чем число заданных в выборке точек. При этом ЭВМ оставляет существенные аргументы и при помощи селекции уменьшает число предполагаемых компонент системы.

2.3.3.3. *Описание объекта при помощи ряда Вольтерра* (см. разд. 3.3.2). Для достаточно общего класса динамических систем связь между выходной и входной величинами (матрица «вход — выход») может быть представлена в виде рядов Вольтерра:

$$y^M(t) = k_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t, s) u(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t, s_1, s_2) u(s_1) u(s_2) ds_1 ds_2 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_3(t, s_1, s_2, s_3) u(s_1) u(s_2) u(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots,$$

где $k_1(t, s)$ определяет весовую функцию линейной части, а последующие члены ряда — нелинейности системы. Если перейти к дискретному описанию системы, применить учет запаздывающих аргументов, то получим так называемый обобщенный степенной полином, называемый полиномом Колмогорова — Габора:

$$y_i^M = k_0[t] + \sum_{s=0}^g a_s u[t-s] + \sum_{s_1} \sum_{s_2} a_{s_1} a_{s_2} u[t-s_1] u[t-s_2] + \dots,$$

где $k_0[t]$ может быть представлен через соответствующую функцию тренда, а g задает число запаздывающих аргументов (память системы). Если для случая нескольких входных величин $u_j[t]$, $u_j[t-1]$... $u_j[t-g_j]$ ($t = 1(1)n - g$; $g = \max g_j$), где $j = 1(1)m + 1$ и $u_{m+1}[t-k+1] = y[t-k]$ ($k = 1(1)g_{m+1}$), ввести в виде нового обозначения факторы $v_i[t]$, то возникает задача идентификации полного полинома

$$y_i^M = \sum_{j=0}^M b_j v_{ji} + \sum_{j=1}^M \sum_{l \leq j} b_{jl} v_{ji} v_{li} + \dots = f_q(v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{mi}),$$

где $v_{0i} = k_0[t]$; $M = \sum_{j=1}^{m+1} g_j + m$; g — наивысшая степень полинома

Если полный полином содержит не более 20 слагаемых, то для определения оптимальной структуры и оценок коэффициентов применяется

комбинаторный алгоритм МГУА. Если слагаемых больше, то применяют многорядные алгоритмы МГУА, в которых полный полином аппроксимируется при помощи небольших частных описаний. Например, частный полином может быть такого вида:

линейная модель

$$f_1(u_{i,t-j}, u_{k,t-p}) = c_0 + c_1 u_{i,t-j} + c_2 u_{k,t-p}; \quad (2.4)$$

нелинейная модель

$$f_2(u_{i,t-j}, u_{k,t-p}) = f_1(u_{i,t-j}, u_{k,t-p}) + c_3 u_{i,t-j}^2 + \\ + c_4 u_{k,t-p}^2 + c_5 u_{i,t-j} u_{k,t-p}. \quad (2.5)$$

При выборе функций в соответствии с уравнением (2.5) сложность модели быстро повышается от ряда к ряду. В то время, как в первом ряду появляются квадратичные описания, во втором ряду уже содержатся четвертые степени, а частные модели третьего ряда представляют собой полином восьмой степени, т. е. высшая степень k -го ряда составляет 2^k . Чтобы не упустить из перебора полиномы промежуточной сложности, применяются линейные или билинейные модели (в последних участвуют только линейные члены и произведения переменных по два). Используют также линейные частные модели $f_1(v_i, v_j)$ с обобщенными аргументами v_i, v_j , которые наряду с исходными аргументами и их запаздывающими значениями содержат также произведения и степени этих величин.

При наложении добавочных жестких условий, связывающих отдельные компоненты частной модели, повышается устойчивость долгосрочных прогнозов. Примером наряду с выбором $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ может служить предложенная Д. Ихарой зависимость, согласно которой коэффициенты при u_i и u_j связаны друг с другом соотношением $f_j(u_i, u_j) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$, где $z = B v_i + (1 - B) u_j$ [23].

2.4. КРИТЕРИИ СЕЛЕКЦИИ — ЯЗЫК ОБЩЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА И ЭВМ

2.4.1. ВЫБОР КРИТЕРИЯ СЕЛЕКЦИИ ПО ЕГО СЛОВЕСНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Выбор модели оптимальной сложности из множества возможных моделей является многозначной некорректной математической задачей, поэтому при переводе содержательных требований к модели оптимальной сложности в соответствующий формализованный критерий возникают определенные трудности. Для того чтобы определение модели было однозначным, дополнительно формулируют соответствующие принципы выбора или регуляризирующие функционалы.

Наиболее полными и содержательными (и в то же время наиболее размытыми) являются словесные формулировки внешних дополнений,

являющиеся основой для получения формализованных математических критериев селекции, например:

Прогноз должен быть достаточно точным. Из этого непосредственно следует необходимость применения критериев регулярности и сходимости пошагового прогноза (для разностных уравнений). Требования к точности прогноза могут быть снижены, если модель используется для экспериментирования (проигрывания сценария будущего).

Модель должна быть одинаковой вчера, сегодня и завтра. Отсюда следует требование минимума смещения (противоречивости).

Зависимость между переменными должна быть одинаковой — завтра такой же, как и сегодня. В этом случае в качестве критерия селекции нужно применять баланс переменных и т. д.

При таком определении оптимальной сложности модели эксперты сравнительно легко могут договориться между собой даже при различных точках зрения на закономерности объекта.

Словесное выражение критериев как интегральное (опосредствованное) воздействие на результат селекции модели. При планировании и управлении сложными процессами можно действовать на объект, если пользоваться разными уровнями детализации языка воздействий: указывать подробные количественные данные (при этом возникают трудности осуществимости) или задавать только общие предпосылки — условия достижения требуемого свойства или результата. В последнем случае при планировании и управлении используются формы интегральных (общих или определенных) воздействий.

Критерий вида «найти самый точный прогноз», «наиболее непротиворечивое уравнение» и т. п. не указывает конкретно требуемую модель, а только ее некоторые общие свойства по отношению ко всем другим моделям-претендентам. При самоорганизации моделей между человеком и ЭВМ происходит диалог на языке критериев, т. е. на языке более высокой степени общности, чем язык конкретных указаний. Для любого критерия, заданного словесно, можно придумать различные математические интерпретации, которые, к сожалению, не обладают общностью и степенью размытости словесных критериев. Этим объясняется существование большого числа различных формализованных критериев для выбора модели оптимальной сложности и их противоречивость в процессе моделирования.

2.4.2. ПРОБЛЕМА ОСТРОТЫ ВЫБОРА МОДЕЛИ

Большое количество различных критериев селекции модели оптимальной сложности требуется для того, чтобы подобрать критерий, обеспечивающий наиболее острый выбор: *значение критерия для искомой модели должно быть значительно меньше, чем для ее соседей по оси сложности.* Кроме того, *разнообразие критериев* необходимо для того, чтобы полнее выразить различные стороны требований к результату моделирования. При самоорганизации автор модели может вли-

ять на результат моделирования только через выбор вида критериев селекции. Все другие способы диалога человек — машина нарушают объективный характер самоорганизации моделей.

2.4.3. КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ $\Delta^2(B)$

Общим для формулируемых ниже критериев является то, что они используются как внешние дополнения, т. е. определяются на основе проверочной или экзаменационной выборки и в значительной степени соответствуют требованию воспроизводимости результата [2].

Реализация выборки N делится на реализацию обучающей выборки N_A , при помощи которой оцениваются параметры модели, и реализацию проверочной выборки N_B , при помощи которой осуществляется выбор пригодной модели. Критерий регулярности определяет среднеквадратичное отклонение модели на проверочной выборке, т. е.

$$\Delta^2(B) = \sum_{i \in N_B} (y_i^M - y_i)^2 / \sum_{i \in N} y_i^2 \rightarrow \min$$

Если исходить из того, что при постоянном комплексе условий хорошая аппроксимация в прошлом гарантирует хорошую аппроксимацию в ближайшем будущем, то критерий регулярности можно особенно рекомендовать для краткосрочного прогноза, так как решение, полученное на новых реализациях, дает лишь малое отклонение, а найденная таким образом модель будет регулярной, т. е. мало чувствительной к небольшим изменениям исходных данных. При этом в процессе селекции могут быть потеряны важные переменные, влияние которых, однако, косвенно будет учтено через другие переменные.

Критерий регулярности может быть определен как коэффициент корреляции

$$K_{y^M y} = \sum_{i \in N_B} y_i y_i^M / \sqrt{\sum_{i \in N_B} y_i^2 \sum_{i \in N_B} y_i^{M^2}} \rightarrow \max$$

или индекс корреляции

$$\rho_{y^M y} = \sqrt{1 - \sum_{i \in N_B} (y_i - y_i^M)^2 / \sum_{i \in N_B} (y_i - \bar{y})^2},$$

где

$$\bar{y}_i = 1/n_B \sum_{i \in N_B} y_i,$$

а n_B — число точек в проверочной выборке. Индекс корреляции, теоретический минимум которого равен единице, в меньшей степени зависит от особенностей конкретного процесса и поэтому более пригоден для сравнения моделей.

Критерий регулярности рекомендуется использовать в качестве вспомогательного (регуляризирующего). Основными критериями при

этом могут быть критерий минимума смещения или критерий баланса переменных.

В случае самостоятельного применения критерия регулярности его используют в симметричной форме:

$$\Delta^2(AB) = \sum_{i=1}^{n_B} (\hat{y}_A - y_{\Phi})^2 + \sum_{i=1}^{n_A} (\hat{y}_B - y_{\Phi})^2 = \Delta^2(B/C) + \Delta^2(A/B) \rightarrow \min.$$

Симметричная форма критерия увеличивает помехоустойчивость выбора модели.

2.4.4. КРИТЕРИЙ МИНИМУМА СМЕЩЕНИЯ (НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ) МОДЕЛИ $n_{см}^2$

Выборка исходных данных делится на две одинаковые части N_A и N_B , на которых соответственно определяются модели A и B с выходами y_i^A и y_i^B и параметрами C_i^A и C_i^B . Критерий минимума смещения равен среднеквадратичному значению отклонений выходов моделей A и B для всей выборки ($t \in N$):

$$n_{см}^2 = \sum_{i \in N} (y_i^A - y_i^B)^2 / \sum_{i \in N} y_i^2 \rightarrow \min.$$

Интерпретация критерия такова: модель, оценка которой получена по данным определенного интервала наблюдения или в определенной точке наблюдения, должна как можно ближе совпадать с моделью, полученной по данным другого интервала наблюдения или в другой точке наблюдения. Критерий выражает собой требование непротиворечивости модели.

На рис. 2.13 показаны кривые $y_i^A = f_A(t)$ и $y_i^B = f_B(t)$, представляющие указанные модели A и B . В пространстве состояний для одной регрессионной связи с двумя переменными это означает, что поверхность регрессии $y_i^A = f_A(u_1, u_2)$ достаточно хорошо совпадает с поверхностью регрессии $y_i^B = f_B(u_1, u_2)$. В алгоритмах самоорганизации применяются следующие два критерия минимума смещения: $n_{см1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (y_i^A - y_i^B)^2 \rightarrow \min$;

$$n_{см2}^2 = 2 \sum_{i \in N} y_i^A y_i^B / \sum_{i \in N} [(y_i^A)^2 + (y_i^B)^2] \rightarrow \max.$$

Предложены также критерии минимума смещения, основанные на анализе коэффициентов. Однако эти критерии имеют смысл только в том случае, если численные значения коэффициентов имеют одинаковой

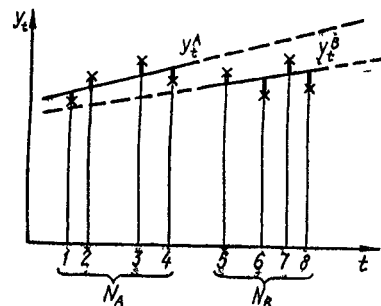


Рис. 2.13. К пояснению требования непротиворечивости моделей, полученных на выборках A и B

порядок или при помощи соответствующей нормировки могут быть приведены к нему. Речь идет о выражении

$$n_{см3}^2 = \sum_{i=1}^M (C_i^A - C_i^B)^2 / \sum_{i=1}^M [(C_i^A)^2 + (C_i^B)^2] \rightarrow \min$$

Здесь M задает совокупность параметров модели C_i^A и модели C_i^B , полученных на N_A и N_B .

Можно разработать и другие критерии минимума смещения, основанные на анализе коэффициентов. Например,

$$n_{см4}^2 = \sum_{i=1}^M C_i^A C_i^B / \sum_{i=1}^M (C_i^A + C_i^B)^2 \rightarrow \min.$$

Такие критерии, будучи функциями параметров, являются безразмерными, симметричными и мало чувствительными по отношению к разности малых коэффициентов.

Критерии, использующие суммы или разности. Достоверность оценки параметров моделей, как известно, пропорциональна числу точек измерения, поэтому разделение выборки наблюдений на обучающую и проверочную снижает надежность оценки коэффициентов и тем самым надежность оценки критерия $n_{см}^2$. Для преодоления этого затруднения в последнее время были разработаны критерии, не требующие деления таблицы наблюдений и позволяющие получить параметр модели C_i по всем измерениям. В качестве новой информации используют суммы или разности наблюдаемых значений, с помощью которых получают оценки C_i^s и C_i^d .

Критерии для динамических систем. Для динамических систем наряду с уже описанными критериями минимума смещения используют специфические характеристики, дающие разность между результатами пошагового интегрирования двух разностных уравнений с коэффициентами, полученными на N_A и N_B , т. е.

$$n_{см1}^2 = \sum_{k=1}^T [y_A(k, y_0) - y_B(k, y_0)]^2 / \sum_{i \in N} y_i^2.$$

Здесь $y_A(k, y_0)$ и $y_B(k, y_0)$ представляют собой результаты пошагового интегрирования для моделей, оценка которых получена на N_A и N_B . В комбинаторных алгоритмах МГУА при использовании этого критерия не возникает никаких затруднений. Однако для многорядных алгоритмов такие критерии чрезвычайно неудобны и их можно рекомендовать только для окончательного выбора оптимальной модели из множества лучших моделей на последнем ряду селекции.

2.4.5. КРИТЕРИЙ ДЛЯ МАЛЫХ ВЫБОРОК

При очень коротких временных рядах деление таблицы на две части нецелесообразно. Наряду с интегральными и дифференциальными критериями в этом случае рекомендуется применять критерии

минимума смещения для всей таблицы, коэффициенты модели которых определяются один раз при помощи метода наименьших квадратов, а второй раз — при помощи ортогональной регрессии [19].

Применяется так называемый *усредненный критерий регулярности* (УКР), который равен среднему значению критериев регулярности, рассчитанных для случая выделения всех точек измерений по одной в проверочную выборку. Из наблюдений выбирают несколько точек, которые по очереди образуют проверочную выборку, тогда как остальные реализации служат для самоорганизации модели. Сумма ошибок для всех возможных проверочных выборок (равных числу точек) представляет усредненный критерий регулярности. Для n реализаций справедливо выражение:

$$\text{УКР} = \Delta^m(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i(B) \rightarrow \min.$$

Критерий экстремального значения критерия минимума смещения. При некотором способе разделения точек таблицы исходных данных минимум критерия смещения достигает наибольшего значения. Критерий, основанный на таком разделении, является более полным критерием минимума смещения, чем отдельные $n_{\text{см}}^2$, полученные при других способах разделения. Алгоритм для приближенного получения $n_{\text{см max}}^2$ требует сравнения всех возможных разделений таблицы данных на две части N_A и N_B [13]. С помощью этого алгоритма можно найти оптимальное разделение таблицы и следовательно наиболее эффективный критерий минимума смещения.

Помехоустойчивые варианты. Практически установлено, что модели, полученные для последовательностей N_A и N_B , хорошо аппроксимируют данные на интервале наблюдения и здесь разница характеристик $n_{\text{см}}^2$ моделей может быть несущественной. Поэтому при определенном уровне шума можно выбрать ложную модель. Чтобы уменьшить чувствительность к помехам, т. е. чтобы поднять предельно допустимый уровень шумов, при котором правильность выбора модели не нарушается, рекомендуется вводить суммирование при вычислении критериев не только на интервале интерполяции, но и на интервале βN , где $\beta = 1,5 \dots 2,5$, так как на интервале экстраполяции модели сильнее расходятся (рис. 2.14).

Комбинированный критерий минимума смещения. Комбинированный критерий

$$n_{\text{см комб}}^2 = \sum_{i \in N} (y_i^A - y_i^B) + \mu \left[\sum_{i \in N_A} (y_i^A - y_i)^2 + \sum_{i \in N_B} (y_i^B - y_i)^2 \right],$$

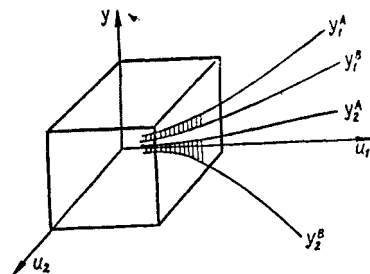


Рис. 2.14. К пояснению повышения чувствительности критерия минимума смещения при помощи увеличения интервала его вычисления

где $\mu \approx 0,5$ — коэффициент веса, представляющий собой объединение двух критериев: критерия минимума смещения $n_{\text{см}}^2$ и среднеквадратичной ошибки σ^2 обеих моделей. Обе составляющие комбинированного критерия обладают одинаковыми свойствами: при приближении оцениваемой структуры к модели оптимальной сложности они стремятся к минимуму. В то же время эти составляющие обладают существенным различием. Критерий $n_{\text{см}}^2$ выражает общее свойство непротиворечивости искомой структуры модели по отношению к выборкам N_A и N_B , т. е. гарантию того, что и на последующей выборке непротиворечивость сохранится. Критерий σ^2 измеряет ошибку аппроксимации соответствующей модели на выборках N_A или N_B . Этот критерий выражает локальные свойства искомой структуры.

Применение нескольких самостоятельных критериев в одном комбинированном обогащает свойства последнего и делает его многосторонним, благодаря чему селекционная способность критерия и его помехоустойчивость повышаются.

2.4.6. КРИТЕРИЙ ТОЧНОСТИ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

Кроме разделения таблицы исходных данных на обучающую и проверочную выборки при самоорганизации прогнозирующих моделей рекомендуется выделение части данных в экзаменационную выборку N_C для проверки качества прогноза. На экзаменационной выборке определяется среднеквадратичное отклонение вычисленного с помощью модели (предсказанного) значения от истинного:

$$RR = \Delta^2(C) = \sum_{i \in N_C} (y_i^M - y_i)^2 / \sum_{i \in N_C} y_i^2 \rightarrow \min.$$

Этот критерий применяется в комбинации с одним из критериев, рассмотренных в разд. 2.4.2 или 2.4.3.

При прогнозировании метеорологических переменных используют критерий точности пошагового прогноза

$$RR = \Delta_1^2(C) = \sum_{i \in N} (y_i^M - y_i)^2 / \sum_{i \in N_C} (y_i - \bar{y}_i)^2 \rightarrow \min,$$

где $\bar{y}_i$ — средний тренд (климатическое среднее) всех реализаций, а N_C состоит по меньшей мере из трех реализаций (точек). Для циклических процессов $y_{i,k} = 1, \dots, q$; $k = 1, \dots, p$, где p — число интервалов в одном сезоне; q — число периодов в пространстве наблюдений, климатическое среднее получается как среднее значение для соответствующих интервалов времени (например, месяц, квартал) за периоды (например, года) $i = 1, \dots, q$:

$$y_k = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q y_{ik}$$

При $\Delta^2(C) \leq 0,5$ прогноз считается хорошим, при $\Delta^2(C) \leq 0,8$ — удовлетворительным, а при $\Delta^2(C) = 1$ — соответствующим точности прогноза по климатическому среднему. При $\Delta^2(C) > 1$ применять прогнозирующую модель не имеет смысла.

2.4.7. КРИТЕРИЙ БАЛАНСА

При постоянном комплексе условий и при отсутствии нарушений структуры объекта действующие на наблюдаемом интервале времени закономерности (связи характеристических переменных) сохраняются и в будущем. Согласно критерию баланса из всех полученных моделей выбирается та, которая в определенном интервале времени лучше всего соответствует заданной закономерности. Пусть $f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_s(t)) = 0$ — функции баланса (т. е. закон, связывающий переменные $u_i(t)$, $i = 1(1)s$). Из множества всех прогнозирующих моделей для переменных $u_i(t)$ должна быть выбрана такая модель, для которой на интервале экстраполяции это соотношение выполняется наилучшим образом. Нарушение баланса переменных можно обозначить как $b_i = f(u_1(t_i), \dots, u_s(t_i))$, где t_i — моменты времени на интервале прогноза. Критерий баланса позволяет выбрать лучший прогноз из веера возможных трендов для каждого прогнозируемого процесса. Во многих случаях функцию, представляющую связь между переменными, легко узнать из физических представлений. В других случаях взаимосвязь переменных можно определить с помощью алгоритмов группового учета аргументов.

Критерий баланса переменных можно применять при одновременном прогнозе нескольких переменных. В этом случае необходимо, чтобы связь между переменными была инвариантной, т. е. зависимость, действующая на интервале наблюдения, была действительной также и на интервале прогноза.

Если связь между переменными существует, то на интервале интерполяции получаются несмещенные модели:

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(u_2, u_3, \dots, u_s); \\ u_2 &= f_2(u_1, u_3, \dots, u_s); \\ u_s &= f_s(u_1, u_2, \dots, u_{s-1}). \end{aligned}$$

Если функции, задающие здесь прямые зависимости, являются обратимыми, то тогда аргументы правой части могут быть выражены через аргументы левой части.

Получается система, индексы которой устанавливаются заново в соответствии с последовательностью:

$$\begin{aligned} u_1 &= g_1^{-1}(u_2, u_3, \dots, u_s); \\ u_2 &= g_2^{-1}(u_1, u_3, \dots, u_s); \\ u_s &= g_s^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_{s-1}), \end{aligned}$$

где i -я обратная функция g_i^{-1} получена из инверсии j -й связи ($j \neq i$) $\times \times f_j$.

Из всех возможных вариантов получения обратных функций следует предпочесть тот, который лучше всего соответствует получению прямой функции. Величины

$$b_{1i} = (f_1 - g_1^{-1})^2, \quad b_{2i} = (f_2 - g_2^{-1})^2, \quad \dots, \quad b_{si} = (f_s - g_s^{-1})^2,$$

вычисленные для каждой переменной с помощью прогнозирующей модели в момент времени t_i на интервале экстраполяции, характеризуют нарушение баланса в заданный момент времени.

9. Значения прогнозируемой и вспомогательных переменных для прогнозирования роста населения земли

Год	Население x , млн чел	Вспомогательные переменные			Год	Население x , млн чел	Вспомогательные переменные		
		v_1	v_2	v_3			v_1	v_2	v_3
1930	2 070	0,1185	0,0140	0,3443	1955	2 713	0,4814	0,23171	0,6940
1935	2 102	0,136	0,01864	0,3695	1960	2 982	0,6332	0,40094	0,79575
1940	2 295	0,2454	0,06023	0,4954	1965	3 289	0,8064	0,69024	0,8980
1945	2 377	0,2918	0,08514	0,5400	1970	3 632	1,0000	1,0000	1,0000
1950	2 486	0,3533	0,12482	0,5933					

Критерий баланса

$$B_i^2 = \sum_{t \in P} \sum_{j=1}^s b_{ji} = \sum_{t \in P} \sum_{j=1}^s (f_j - g_j^{-1})^2$$

используется для выбора оптимальной модели.

Пример 10. Прогнозирование роста населения Земли Для получения системы уравнений применялись две вспомогательные переменные а именно: квадрат и корень числа жителей (табл. 9). При этом переменные вычислялись в соответствии с выражением

$$v_1 = (x - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}); \quad v_2 = v_1^2; \quad v_3 = \sqrt{v_1},$$

где x — население Земли. При этом все точки табл. 10 точно соответствуют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} b_{1t} &= v_{1t} - \sqrt{v_{2t}}; \\ b_{2t} &= v_{2t} - v_{3t}^4; \\ b_{3t} &= v_{3t} - \sqrt{v_{1t}}. \end{aligned}$$

Критерий баланса имеет вид

$$B_i^2 = \sum_{t \in P} (b_{1t}^2 + b_{2t}^2 + b_{3t}^2).$$

Прогноз роста населения должен быть дан для периода с 1970 по 2000 г., причем требуется, чтобы на этом

10. Прогноз роста населения Земли

Год	Население x , млн чел
1975	4 007,4
1980	4 450,3
1985	4 954,1
1990	5 524,9
1995	6 169
2000	6 893,2

интервале выполнялся критерий баланса. Применяется комбинаторный алгоритм МГУА с оценкой коэффициентов полинома по всем наблюдениям с использованием метода наименьших квадратов. Для сокращения числа комбинаций функции тренда можно пренебречь значениями, дающими для 2000 г. отрицательные значения числа жителей планеты или значения, больше 10^{10} . При таком ограничении остается всего десять полиномов, т. е. число комбинаций уменьшается до 10^3 . Эти комбинации оценивались по критерию баланса. Минимальное значение критерия баланса получено для приведенного в табл. 10 прогноза [24].

В некоторых случаях прямая и обратная функции идентичны, тогда в качестве критерия баланса для выбора модели используется характеристика

$$B_i^N = \sum_{l=1}^s \sum_{t \in P} [(u_l(t_i) - f_l(t_i))^2 + (u_l(t_i) - g_l^{-1}(t_i))^2]$$

Если прогнозирующая модель описывается дифференциальными уравнениями, то экстраполяция реализуется при помощи пошагового интегрирования. При этом наилучшие прогнозы получаются для критериев баланса, основанных на физических явлениях.

В одномерном случае можно искусственно увеличить число переменных, как это было показано в задаче прогноза населения Земли. Для процессов с сезонным характером можно использовать гармонические функции как на интервале интерполяции, так и в области экстраполяции. Выбор оптимального ряда гармоник выполняется при помощи критериев баланса, которые в этом случае являются критериями баланса ординат гармоник [24]. Если функция описывается суммой тригонометрических функций на интервале $t \in N$, а именно:

$$y_t = \sum_{k=1}^m (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t),$$

то справедливо следующее балансное соотношение:

$$b_t = y_{t+m} - \sum_{k=0}^{m-1} a_k (y_{t+k} + y_{t-k}) + y_{t-m},$$

где коэффициенты a_k представляют собой решение уравнения ($k = 1, \dots, m$)

$$a_0 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \cos j\omega_k = \cos m\omega_k.$$

Поэтому для $m=1$ справедливо равенство $b_t = y_{t+1} - 2a_0 y_t + y_{t-1}$, где $a_0 = \cos \omega$, а для $m=2$ $b_t = y_{t+2} - 2a_0 y_t - a_1 y_{t+1} - a_1 y_{t-1} + y_{t-2}$, где $a_1 + a_2 \cos \omega_1 = \cos 2\omega_1$; $a_1 + a_2 \cos \omega_2 = \cos 2\omega_2$.

Другие возможности применения критерия баланса, особенно для долгосрочного прогноза, будут рассмотрены в гл. 4. В частности, этот критерий может быть применен, если переменные должны быть определены за разное время или на различных пространственных интервалах. С увеличением интервала усреднения точность

прогноза может быть повышена, однако в то же время происходит потеря информации. Критерий баланса, например, требует, чтобы прогноз годового значения Y_i в i -м году был равен сумме месячных значений y_{ij} j -х месяцев в i -м году:

$$B_{i1}^2 = \sum_{j \in P} \left[y_{ij} - \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} y_{ij} \right]^2 \rightarrow \min.$$

При пространственном усреднении, например, прогноз суммы уровней воды в трех реках y_4 должен быть равен сумме прогнозов уровней воды в трех реках y_i , $i = 1, 2, 3$:

$$B_{i2}^2 = \sum_{i \in P} [y_{4i} - (y_{1i} + y_{2i} + y_{3i})]^2 \rightarrow \min.$$

Устранение многозначности прогноза по критерию баланса. Среди комбинаций сезонных и годовых прогнозов, дающих малое значение критерия баланса переменных, обязательно находится комбинация, приближающаяся к фактическому ходу процесса. В то же время среди них находятся также ложные, не соответствующие действительному ходу процесса, комбинации (многозначность критерия баланса). Среди многих комбинаций, удовлетворяющих критерию баланса, должен быть найден истинный баланс. Устранение многозначности критерия баланса достигается при помощи регуляризации, т. е. введением дополнительной информации (внешнего дополнения). Таким внешним дополнением может быть указанное выше ограничение — критерий физической реализуемости.

Прогнозирование суммы случайных процессов, в общем, всегда точнее, чем прогнозирование слагаемых процессов. Это свойство можно использовать для повышения точности прогноза на длительный срок. Сначала экстраполируется суммарный процесс, затем составляющие процессы, которые в любой момент времени должны находиться в определенном состоянии (балансе) с общим процессом. Например, для прогнозирования числа научных работников целесообразно вначале прогнозировать рост населения в стране, а затем находить прогноз абсолютного числа научных работников.

Теория регуляризации решений акад. АН СССР А. Н. Тихонова как обоснование выбора модели оптимальной сложности на плоскости двух критериев. Оригинальный характер МГУА подтверждается тем, что в нем применяются критерии, ранее неизвестные в математической статистике. критерий минимума смещения n_{cm} и критерий баланса переменных B_i . Эти критерии могут привести к многозначному выбору модели (благодаря наличию локальных минимумов) и менее помехоустойчивы, чем другие критерии [23, 37]. Комбинированные критерии вида суммы квадратов двух критериев

$$\rho^2 = n_{cm}^2 + \lambda I^2(N); \quad \rho^3 = n_{cm}^2 + \lambda \Delta^2(A+B),$$

где λ — коэффициент веса регуляризирующего критерия, который обеспечивает однозначность выбора оптимальной модели и нечув-

ствительность алгоритма самоорганизации к помехам. Слагаемые $\lambda I^2(N)$ и $\Delta^2(A+B)$ являются регуляризирующими операторами теории регуляризации акад. АН СССР А. Н. Тихонова [77]. Сумма может быть заменена последовательным отбором оптимальной модели по двум критериям (сначала выбирается F_1 моделей по первому критерию, а затем $F_2 = 1$ по второму). Первый критерий является регуляризирующим. Он должен иметь одномодальную характеристику, устойчивую к помехам. В качестве регуляризирующего оператора используется критерий $I^2(3)$ или $\Delta^2(A+B)$, дающий однозначный выбор модели и менее чувствительный к помехам.

В соответствии с теорией регуляризации рекомендуется для устранения многозначности и чувствительности к помехам добавить тот или иной регуляризирующий оператор. В качестве такого дополнительного оператора можно использовать различные критерии, в том числе критерий регулярности $\Delta^2(B)$ или критерий точности многошагового прогноза $I^2(3)$. Комбинированные критерии имеют вид $\rho_1^2 = n_{см}^2 + \Delta^2(B)$; $\rho_2^2 = n_{см}^2 + I^2(3)$; $\rho_3^2 = B_i^2 + \Delta^2(B)$; $\rho_4^2 = B_i^2 + I^2(3)$.

Сумму двух критериев можно заменить последовательным их применением одного за другим (в соответствии с принципом неокончательных решений Д. Габова).

Критерий регулярности связан с решением задачи разделения таблицы данных на две части N_A и N_B ($N = N_A \cup N_B$). Ясно, что критерий точности многошагового прогноза, не требующий разделения таблицы, имеет значительное преимущество. Критерий точности краткосрочного прогноза $\Delta^2(C) = RR \leq 1$ применяется во всех случаях как предварительное ограничение перебора моделей.

2.4.8. НЕСКОЛЬКО ДРУГИХ КРИТЕРИЕВ

Наряду с упомянутыми критериями имеется еще ряд критериев, которые также могут найти применение.

Критерий точности пошагового интегрирования оценивает среднеквадратичную ошибку, возникающую в результате пошагового интегрирования на M шагов вперед, и вычисляется при помощи выражения

$$I^2(N) = \sum_{i \in N} (\tilde{y}_i^M - y_i)^2 / \sum_{i \in N} y_i^2 \rightarrow \min$$

Критерий рекомендуется для разностных уравнений. Он не требует разделения наблюдений на обучающую и проверочную выборки — проверка может осуществляться на тех же данных, на которых определялась модель, так как интеграл и его подынтегральное выражение независимы, и интеграл (и производную) можно рассматривать как новую информацию. Следовательно, критерий, хотя он и вычислен на обучающей выборке, может служить в качестве внешнего дополнения.

В отличие от критерия среднеквадратичного отклонения, при котором для $t \in N$ прогноз вычисляется только на один шаг вперед, например, $y_{t+1} = f(y_t)$ (одношаговый прогноз), при использовании критерия пошагового интегрирования выполняются все шаги пошагового прогноза, например, $\tilde{y}_{t+1}^M = f(\tilde{y}_t^M)$ (рис. 2.15).

Если прогнозирующая модель предлагается в виде однородной системы разностных уравнений $x_{k+1} = Ax_k$, то критерий получает следующий вид:

$$I^2(N) = \sum_{k=1}^{n-1} (\underline{x}_{k+1} - A^k \underline{x}_1) (\underline{x}_{k+1} - A^k \underline{x}_1) \rightarrow \min.$$

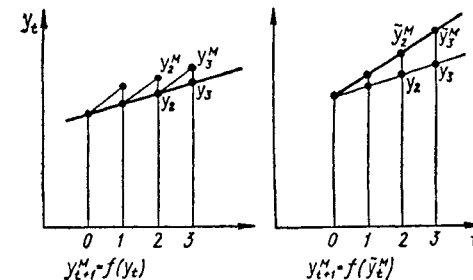


Рис. 2.15. К пояснению критериев точности одно- и многошагового прогнозов

Критерий точности пошагового интегрирования может применяться не только для выбора структуры модели, но и для устранения смещения оценок коэффициентов, для чего в пространстве значений оценок следует использовать поисковый метод.

Критерий разнообразия аргументов применяется особенно на первой ступени самоорганизации, для того чтобы обеспечить

по возможности большее разнообразие аргументов [30]. Для сложных систем целесообразно наряду с обычными критериями использовать еще одно требование: число аргументов должно быть не слишком большим.

Критерий простоты модели. Из числа почти равноценных математических моделей, выбранных по какому-либо критерию селекции в соответствии с критерием простоты в качестве модели оптимальной сложности выбирается модель с меньшим числом аргументов при более простой опорной функции.

Ограничения на значения переменных в качестве регуляризирующего внешнего дополнения. В качестве внешнего дополнения, необходимого для однозначного выбора модели, иногда можно использовать априорную информацию об ограничениях. Так, для прогноза в общем случае требуется устойчивая модель. По этой причине иногда рассматривается отбор модели по устойчивости. Часто также имеется информация об интервалах, в которых должен лежать прогноз, например, он не может стать более 100 %. Эту априорную информацию также не следует скрывать от ЭВМ. В соответствии со сформулированными А. Н. Тихоновым типами внешних дополнений возникает возможность применения математического ожидания и автоковариаций, выборок некоррелированных реализаций, требований гладкости и других критериев. Очевидно, что учет таких внешних дополне-

ний при выборе модели оптимальной сложности только тогда целесообразен, когда соответствующие свойства модели действительно требуются ее потребителю. Например, трудно найти заказчика, которому требуются модели с обязательно гладкими решениями и т. п.

2.4.9. ИНФОРМАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ

Наряду с рассмотренными критериями селекции, разработанными в рамках теории самоорганизации, в последние годы появились критерии, названные информационными, которые основаны на принципе максимизации энтропии [1, 50]. Согласно этому критерию из моделей, оцененных в соответствии с принципом максимального правдоподобия, необходимо выбрать такую структуру модели, которая максимизирует ожидаемое значение энтропии истинной модели по отношению к проверяемой. Для оценки энтропии применяется величина, получаемая из удвоенного значения логарифма функции правдоподобия в точке, в которой функция достигает максимума (из этой величины нужно вычесть удвоенное число независимо вычисляемых параметров модели).

Использование этого критерия ограничено, так как трудно проверить условия применимости теории оценок Фишера. В критерии участвует параметр, назначенный автором модели. Это лишает выбор модели объективности [50]. Главный недостаток состоит в том, что модель, выбранная по информационному критерию, может быть противоречивой. Поэтому этот критерий можно применять как регуляризирующий в дополнение к основному критерию МГУА.

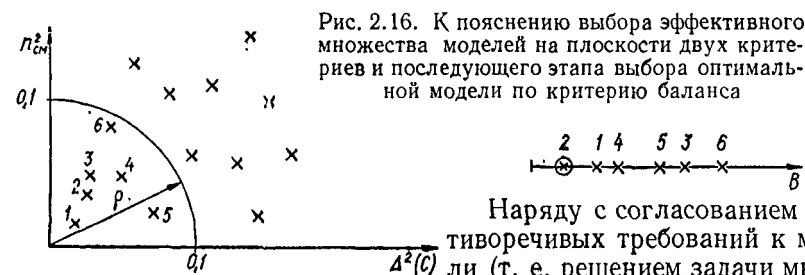
2.4.10. КОМБИНИРОВАННЫЕ КРИТЕРИИ

Выбор критерия селекции определяется типом задачи, целью и пожеланиями автора модели. Часто требования к модели противоречивы и не всегда могут быть достигнуты минимизацией одного критерия. В алгоритмах самоорганизации применяются критерии, которые, на первый взгляд, представляются мало рациональными. Так, критерий минимума смещения требует, чтобы модель, полученная на первой половине таблицы измерений N_A , была, по возможности, одинаковой с моделью, полученной на другой половине N_B . Такой критерий сам по себе не является действенным, потому что обе почти одинаковые модели могут быть одинаково плохими и неточными. По причине многозначности выбора модели один этот критерий не может применяться. Это утверждение действительно также для критериев баланса. Можно, например, выбрать бесконечно большое число вариантов месячных прогнозов, соответствующих одному и тому же годовому. Такие критерии должны применяться к множеству моделей, уже отобранных при помощи соответствующих вспомогательных критериев.

Последовательное использование критериев является средством регуляризации выбора, т. е. делает его однозначным. Применение нескольких критериев служит также для повышения помехоустойчивости алгоритмов самоорганизации. Если какой-либо критерий требует слишком больших вычислений, то при помощи вспомогательных критериев нужно провести предварительный отбор, чтобы уменьшить объем перебора. Во всех этих случаях нужно переходить к последовательному применению критериев (одного за другим) или к комбинированным критериям, которые в общем случае для двух критериев K_1 и K_2 принимают вид ($0 < \beta < 1$; $\lambda = 1 - \beta$):

$$K_{1\text{комб}} = \sqrt{\beta K_1^2 + (1 - \beta) K_2^2};$$

$$K_{2\text{комб}} = \sqrt{\beta (K_1/K_{\max})^2 + (1 - \beta) (K_2/K_{2\max})^2}.$$



Наряду с согласованием противоречивых требований к модели (т. е. решением задачи многокритериальной оптимизации) применение комбинированных критериев также позволяет получать однозначный выбор структуры в случае, когда один из критериев приводит к многозначному выбору. При этом нужно оба частных критерия выбрать с учетом физического смысла решаемой задачи моделирования. Модели, равноценные в соответствии с определенным критерием, оказываются разными по отношению ко второму критерию, поэтому и возможен однозначный выбор модели.

Задача выбора модели оптимальной сложности в соответствии с несколькими критериями селекции весьма сходна с задачей распознавания образов, т. е. с задачей выбора класса с заданными свойствами. Заранее известен лишь центр класса. Он лежит в начале координат (рис. 2.16). Радиус ρ при известной дискретизации шума σ^2 может быть выбран из следующего соотношения [24]: $\rho/R \leq \tau\sigma^2$, где $0 \leq \tau \leq 1$; R — радиус круга, содержащего все модели. В первом приближении выбирают $\rho = 0,05R$.

2.4.11. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ (ИЕРАРХИЯ) КРИТЕРИЕВ

Для того чтобы обойти нормирование критериев и одновременно упростить вычислительные программы, иногда вместо комбинации критериев реализуют их последовательное применение. При этом сле-

дует различать основные и вспомогательные критерии. Основные критерии выбираются в соответствии с постановкой задачи. Вспомогательные критерии подчиняются основным и служат, главным образом, для сокращения объема выбора. В качестве вспомогательных применяют критерии, дающие хорошо выраженный минимум при возрастающей сложности модели. Это требуется особенно тогда, когда основной критерий не обладает этим свойством. Например, при помощи критерия регулярности можно осуществить предварительный отбор, а выбор затем производить из оставшихся после этого отбора вариантов модели по критерию минимума смещения или баланса. Последовательное применение различных критериев часто лучше, чем применение комбинированных. В последнее время при этом используются следующие три критерия: $n_{см}^2$ — критерий минимума смещения; $\Delta^2(C)$ — критерий точности на экзаменационной последовательности; B_i^2 — критерий баланса.

На плоскости $n_{см}^2 - \Delta^2(C)$ по обоим критериям выбирается определенное число лучших моделей (рис. 2.16, а). После этого при помощи оценки по критерию баланса B_i^2 определяется оптимальная модель. При последовательном применении различных критериев в соответствии с принципом неокончательных решений Д. Габора рекомендуется постепенно сокращать количество моделей, отбираемых на каждом шаге. Если выходное множество содержит F моделей, то по первому критерию следует выбрать F_1 моделей, по второму — F_2 моделей, по третьему — F_3 моделей, где $F > F_1 > F_2 > F_3 > 1$. Из F_3 моделей следует определить единственную модель оптимальной сложности.

2.5. СПОСОБЫ ОБРАЗОВАНИЯ КРИТЕРИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ

2.5.1. НОРМИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Регуляризация должна обеспечить получение однозначного и устойчивого решения, причем такого, чтобы незначительные изменения в наблюдениях вызывали также лишь незначительные изменения коэффициентов. Регуляризация, в частности, достигается при помощи разделения таблицы наблюдений на проверочную и обучающую выборки, что необходимо для выбора оптимальной структуры модели по внешнему критерию. Предварительно переменные, участвующие в моделировании, подлежат нормированию.

Широко распространено нормирование переменных v_i по тренду φ_i :

$$\tilde{v}_i = (v_i - \varphi_i) / \varphi_i.$$

В общем случае выбирают тренд в виде степенного полинома

$$\varphi_i = \sum_{k=0}^q b_k t^k$$

или гармонического тренда

$$\varphi_i = \sum_{k=0}^q (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Для степенного полинома при $q = 0$ получается **нормирование по среднему значению**

$$m_v = 1/n \sum_{i \in N} v_i,$$

где n — число реализаций наблюдений, применяемое чаще всего. Нормирование по функции тренда является неопределенным (какую сложность тренда применять?) и используется только при действительно нестационарных процессах. Исключение тренда из исходных данных существенно увеличивает роль случайных колебаний. В результате большой неопределенности в выборе структуры функции тренда могут быть получены соответственно искаженные модели. Ввиду того что результаты самоорганизации зависят от выбора функции тренда, этот выбор должен выполняться с большой осторожностью. Для получения оптимального нормирования, которое гарантирует наилучшие числовые свойства информационной матрицы, необходимо отклонение от тренда разделить на стандартное отклонение [29]. При этом получается следующее нормирование:

$$\tilde{v}_i = (v_i - \varphi_i) / \sigma_v,$$

где

$$\sigma_v = \sqrt{1/n \sum_{i \in N} (v_i - m_v)^2}.$$

При $q = 0$

$$\tilde{v}_i = (v_i - m_v) / \sigma_v.$$

2.5.2. СПОСОБЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ ДАННЫХ НА ЧАСТИ

Разделение таблицы исходных данных на части связано с применением критерия регулярности $\Delta^2(B)$. В настоящее время для самоорганизации моделей оптимальной сложности рекомендуются критерии: минимума смещения $n_{см}^2$, (УКР), точности многошагового прогноза $I^2(N)$ или точности краткосрочного прогноза $RR = \Delta^2(C)$, где вопрос о способе разделения таблицы данных не возникает. Однако критерий регулярности все еще иногда применяется и потому в книге рассматривается вопрос о целесообразном разделении таблицы данных на части. Для расчета критерия регулярности $\Delta^2(B)$ наблюдения делятся на две части: на обучающую и проверочную выборки ($N = N_A \cup N_B$).

В зависимости от применяемых критериев при этом можно достичь:

1) такого разделения точек интерполяции, которое гарантирует наилучшие вычислительные свойства информационной матрицы;

2) приблизительного подобию статистических свойств обучающей и проверочной выборок.

Имеется много критериев, которые более или менее приближаются к этой цели. Разделение основано на ранжировании точек по дисперсии. Для каждой точки вычисляется дисперсия по всем m аргументам v_k , включая и выходную величину

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} [(v_{ki} - m_k) m_k]^2,$$

где $v_{m+1} = y$; $m_k = 1/n \sum_{i \in N} v_{ki}$.

Интерполяция между двумя точками тем точнее, чем дальше они удалены друг от друга, поэтому в обучающую выборку берутся точки с большими дисперсиями, которые улучшают вычислительные свойства информационной матрицы. Проверочная выборка содержит остальные точки с малыми дисперсиями, лежащие ближе к среднему значению переменных. Благодаря тому что в обучающую выборку включаются точки, наиболее удаленные от их среднего значения, информационная матрица при этом методе получает наилучшие вычислительные свойства. Если реализации ранжируются в соответствии со значением дисперсии точек таблицы данных, то можно получить зависимость числа рядов от соотношения точек в обучающей и проверочной выборках.

2.5.3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ДАННЫХ НА ЧАСТИ

В соответствии с теоремой Геделя для разделения таблицы данных принципиально необходимо еще одно внешнее дополнение второго уровня. Точки приходится делить не только на обучающую и проверочную выборки, но выделять еще экзаменационные выборки N_C и N_D . Ошибка на второй экзаменационной выборке $\Delta^2(C)$ служит внешним дополнением второго уровня и разделение на обучающую и проверочную выборки производится так, чтобы $\Delta^2(C) \rightarrow \min$. Для оптимизации разделения исходных данных на три выборки необходимо внешнее дополнение третьего уровня $\Delta^2(D)$. Напомним, что должно быть также оптимизировано число всех используемых точек, т. е. длина интервала учитываемой предыстории.

В алгоритмах МГУА разделение таблицы наблюдений часто осуществляется следующим образом: критерий регулярности

$$N_A = 0,7N; \quad N_B = 0,3N; \quad N_C = N_D = 0; \quad N_A = 0,6N;$$

$$N_B = 0,2N; \quad N_C = N_D = 0,1N;$$

критерий минимума смещения

$$N_A = 0,5N; \quad N_B = 0,5N, \quad N_C = N_D = 0; \quad N_A = 0,4N;$$

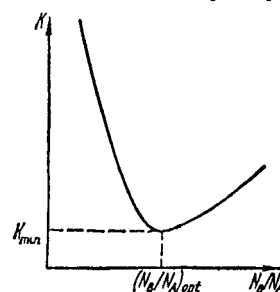
$$N_B = 0,4N, \quad N_C = N_D = 0,1N,$$

где N_A, N_B, N_C, N_D — число точек соответственно в обучающей, проверочной, первой и второй экзаменационных выборках; N — общее число точек.

Более эффективное разделение таблицы данных проводят с помощью внешнего дополнения второго уровня. В качестве дополнений могут использоваться критерий минимального числа рядов селекции, минимаксный критерий и другие (например, диаметр «облака» точек)

Критерий минимального числа рядов селекции. В соответствии с этим критерием нужно выбрать такое разделение таблицы наблюдений, при котором используемые многорядные алгоритмы МГУА потребуют минимального числа рядов селекции. Полученная при этом модель будет самой простой. В каждом конкретном случае может быть получено оптимальное число рядов при помощи варьирования отношения числа точек в обучающей выборке N_A к числу точек в проверочной выборке N_B . На рис. 2.17 показана эта зависимость, которую называют параболой Тодуа. При построении параболы реализации ранжируются по дисперсии опорных точек и отношение изменяется дискретно.

Рис. 2.17. Парабола Тодуа



Парабола Тодуа. Теорема, следующая ниже, формирует способ разделения таблицы данных на две части по критерию достижения наиболее простой структуры модели оптимальной сложности.

если точки ранжированы по величине дисперсии среднеквадратичного отклонения от среднего, то имеется единственное значение отношения числа точек проверочной выборки n_B к числу точек обучающей выборки n_A , при котором получается минимум числа рядов селекции K и, следовательно, наименьшая степень полного полинома модели оптимальной сложности.

Выборка A используется в МГУА для определения оценок коэффициентов, а выборка B — для выбора структуры модели оптимальной сложности. В данном случае в качестве внешнего дополнения используется критерий простоты модели, т. е. действует геделевский подход.

Критерий максимина или минимакса. Рекомендуются выбирать такое разделение таблицы наблюдений, при котором наибольшее значение критерия минимума смещения достигает минимума.

$$\max (n_{cm}^2) \rightarrow \min.$$

С этой целью для каждой модели получают $n_{см}^2$ для всех возможных разделений (рис. 2.18). После этого из всех возможных значений этой характеристики необходимо определить наименьшее, дающее оптимальное разделение. Соответственно можно также для каждого разделения точек для всех моделей получить $n_{см}^2$ и из всех минимумов выбрать наибольший (рис. 2.17)

$$\min(n_{см}^2) \rightarrow \max$$

Это равносильно требованию, чтобы вероятность того, что истинной модели соответствует наименьшее значение внешнего критерия, была бы максимальной. При использовании канонической формы

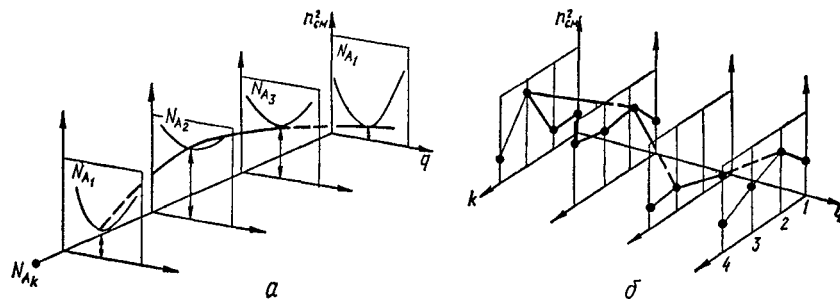


Рис. 2.18 К пояснению критериев максимина (а) и минимакса (б)

внешних критериев удастся сконструировать и вычислить на ЭВМ требуемую функцию распределения [95]

Полный перебор вариантов разделения таблицы данных на две одинаковые последовательности N_A и N_B . Для расчета критерия минимума смещения необходимо разделение на две одинаковые по числу точек выборки (состав каждой из них может быть разным). Для того чтобы получить оптимальное разделение, следовало бы провести полный перебор всех возможных вариантов принадлежности точек к обучающей и проверочной выборке. Такой перебор практически можно реализовать для очень коротких выборок данных

Диаметр «облака» точек. Метод наименьших квадратов дает вектор, представляющий ортогональную проекцию выходных векторов частных моделей в линейном пространстве, образованном из векторов аргументов модели. В зависимости от метода разделения точек на N_A и N_B изменяется и выходной вектор.

Геометрическое место всех точек в плоскости конечных точек векторов образует «облако», диаметр которого может служить мерой для критериев второго уровня. Выбирается такое разделение, при котором диаметр меньше, чем при всех других. Алгоритм для получения такой характеристики требует реализации всех возможных разделений наблюдений, что на практике также возможно только для малых выборок.

Эмпирическая оптимизация. Вычислительные трудности могут быть уменьшены, если ограничиться задачей квазиоптимального разделения таблицы данных [94]. Рассмотрим применение следующего метода регуляризации [23] пусть задано n точек. Первые n — n_C — m

11. Способ разделения данных и значения ошибки на экзаменационной выборке C

Вариант	Выборка данных	$\Delta^*(C)_m$		
		$q = 4$		$q = 8$
		$N_C = 3$	$N_C = 5$	$N_C =$
1-й	BABABABABABAB	0,061	0,137	0,274
2-й	BAABAABAABAAB	0,054	0,112	0,214
3-й	BAAAAAABAAAAAB	0,043	0,092	0,076
4-й	AABAAAAABAAAAAB	0,128	0,330	0,08
5-й	BAAAAAABAAAAAB	0,058	0,126	0,086
6-й	AAAAAABAAAAAAB	0,164	0,460	0,070
7-й	AAABAABAAAAAAB	0,068	0,191	0,053
8-й	ABAAAAAABAAAAAB	0,053	0,061	0,078
9-й	AAAAAABAAAAAAB	0,044	0,102	0,067
10-й	AAAAAABBBBBB	0,992	3,112	5,541

точек служат для построения модели, причем в соответствии с указанным методом регуляризации они могут быть разделены на обучающую и проверочную выборки. Следующие $n_C = T_v$ точек образуют экзаменационную выборку и служат вторым дополнением, где

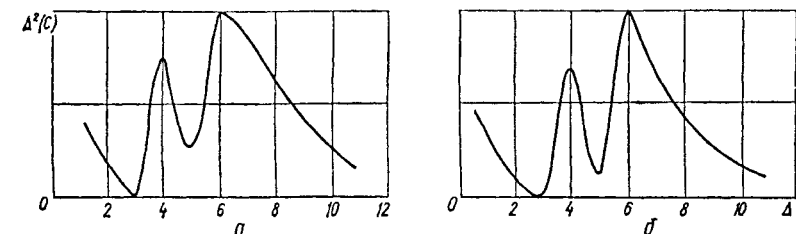


Рис. 2.19 К пояснению эмпирической оптимизации разделения таблицы данных

T_v — время упреждения прогноза. Остальные m точек необходимы для усреднения ошибки прогноза при заданном разделении. Для этого $n - n_C$ точек последовательно сдвигаются от 1 до m , при этом получают прогноз $y_{t,i}^M$, для которого на экзаменационной выборке определяется ошибка (она может быть усреднена для всех m прогнозов). Например, может быть получено

$$\Delta(C)_m = \sqrt{\frac{1}{mT_v} \sum_{i=1}^m \sum_{t \in N_C} [y_t - y_{t,i}^M]^2}$$

Этот прием был использован при исследовании загрузки британской промышленности [23]. Сравнивалось десять вариантов регуляризации, приведенных в табл. 11, в которой указаны ошибки на экзаменационной выборке для $T_v = 3$ (рис. 2.19, а) и $T_v = 5$ лет (рис. 2.19, б), причем усреднение выполнялось за $m = 6$ лет. Оптимальным оказался третий вариант, т. е. в проверочную выборку вошла каждая четвертая точка таблицы данных, а интервал между точками проверочной выборки составил $\Delta = 3$ точки.

2.6. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МГУА

2.6.1. ПРИНЦИП САМООРГАНИЗАЦИИ

При постепенном нарастании числа рядов (следовательно, степени полного полинома, получаемого при помощи развертывания системы частных описаний) значения внешних критериев проходят через глобальный минимум, который соответствует модели оптимальной (для данного критерия) сложности. Порядок усложнения полного полинома определяется видом частного описания и всегда может быть выбран так, чтобы минимум был единственным. Наиболее удобный способ развертывания системы частных описаний в полный полином — при помощи чисел Геделя [92].

2.6.2. ТЕОРЕМЫ О МИНИМУМЕ ТОЧЕК

При произвольном разделении полного полинома степени q на частные критерий среднеквадратичного отклонения можно получить на точках обучающей выборки (оптимальные оценки всех коэффициентов частных моделей и полного полинома), если только число точек обучающей последовательности не меньше числа слагаемых каждой частной модели. Например, для билинейного частного описания вида $y_k = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j$ необходимый для оценки точности моделей алгебраический минимум составляет пять точек для критерия регулярности (обычного или УКР) и восемь точек — для критерия минимума смещения. Наиболее нетребовательным к числу точек таблицы данных является УКР, представляющий собой сумму критериев регулярности, получаемых при выделении в обучающую выборку всех точек по очереди (по одной).

В *многорядных полиномиальных алгоритмах МГУА* на первом ряду селекции используется частное описание, имеющее, например, три члена. В случае применения критерия УКР алгебраический минимум точек равен четырем. Во втором и последующих рядах используются тоже четыре точки данных. Общая модель получается при помощи исключения промежуточных переменных из системы частных описаний. В результате, общая модель оптимальной сложности может содержать значительно большее число слагаемых, чем число слагаемых частных описаний.

В *гармонических алгоритмах МГУА* в первом ряду селекции для выделения из исходных данных одной гармонической составляющей требуется минимум три точки. Следовательно, максимально возможное количество выделяемых частот в первом ряду селекции равно числу точек исходных данных, деленному на три. После выделения частот определяют значения остатков во всех точках. Во втором ряду селекции новые частоты выделяют уже из остатков и т. д. В результате суммарная модель оптимальной сложности может содержать значительно больше гармоник, чем число точек исходных данных, деленное на три, что требуется по теореме В. Н. Котельникова.

2.6.3. О ВЫРОЖДЕНИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ И ОБ ОШИБКЕ МНОГОРЯДНОСТИ

При слишком большом числе рядов селекции (больше 4—5) матрицы коэффициентов частных описаний становятся плохообусловленными из-за наличия коллинеарных (взаимосвязанных) аргументов. Проверочная последовательность B при этом теряет свойства внешнего дополнения (становится все менее информативной). При сравнительно небольшом числе рядов (до 5—6) модели с плохообусловленной матрицей можно просто исключить из перебора. Кроме того, можно сохранить при переборе на каждом ряду исходное множество аргументов x_i . Этот способ позволяет не только повысить обусловленность матрицы, но и устранить методическую ошибку многорядности, которая возникает вследствие того что полный полином многорядного алгоритма не содержит всех возможных членов степенного полинома Колмогорова — Габора. Учет исходных аргументов позволяет добавить ряд слагаемых и таким образом сохранить указанный полином полностью.

2.6.4. О ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ

Теорема, аналогичная известной из теории связи второй теореме Шеннона о канале связи с шумом, утверждает, что при увеличении интенсивности помех, выражаемой отношением помеха/сигнал, алгоритмы МГУА выбирают в качестве модели оптимальной сложности все более простые (по сравнению с физической истинной) модели. Степень отклонения зависит от вида критерия: для критерия регулярности она больше, чем для критерия минимума смещения. Таким образом, симметричный критерий минимума смещения является более помехоустойчивым. При очень больших помехах (вызываемых, например, неполнотой информационного базиса) по МГУА в качестве модели оптимальной сложности выбирается среднее значение наблюдений.

Приведенные положения и теоремы теории МГУА относятся ко всем многорядным алгоритмам. Многорядные алгоритмы МГУА могут включать в себя операцию вычисления разностей (остатков) после каждого ряда селекции или не содержать ее.

2.6.5. ТЕОРЕМА О НЕВОЗРАСТАНИИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ, ИЗМЕРЯЕМОЙ НА ОБУЧАЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема сформулирована на основании теории проекторов и доказана П. И. Ковальчуком [26]. Она устанавливает, что в многорядном алгоритме МГУА среднеквадратичная ошибка, измеряемая на обучающей последовательности A от ряда к ряду, не может возрастать независимо от пути, по которому идет селекция (т. е. выбор пар аргументов).

2.6.5.1. Сходимость алгоритмов самоорганизации. Понятие сходимости имеет большое значение для решения задачи идентификации*. Аналогично методам оценки параметров [46] итерационные алгоритмы структурной идентификации, к которым принадлежат алгоритмы самоорганизации, только тогда пригодны для практического применения, когда последовательность частных моделей сходится к истинной модели, сигналы которой скрыты в зашумленных данных. В отличие от методов оценки параметров, при которых исследуется приближение последовательности оценок параметров к их истинным значениям и где обычно различают слабую сходимость, сходимость по вероятности и т. д., исследование сходимости алгоритмов структурной идентификации требует дополнительных пояснений и формализаций.

Сначала были получены общие, но недостаточно строгие результаты [23]. Новая основополагающая попытка, потребовавшая формализованного описания многорядных алгоритмов, проявила себя как лучшая на каждом ряду [93]. Указанная выше теорема послужила отправным пунктом для более строгих математических исследований сходимости многорядных алгоритмов МГУА применительно к задаче идентификации. Были установлены типы сходимости, а также дано строгое доказательство сходимости при свободе выбора, равной единице, и при свободе выбора, равной числу исходных аргументов.

При этом различались следующие три типа сходимости:

сходимость к точке, если последовательность векторов приходит к такой точке, называемой «точкой сгущения»;

сходимость к решению, если предел последовательности векторов существует и равен наблюдаемому вектору;

сходимость по структуре, когда существует предельное значение последовательности получающихся в каждом ряду селекции математических описаний и оно соответствует истинному описанию.

* Сходимость самоорганизации прогнозирующих моделей еще не рассматривалась.

При определении сходимости, однако проблематичным остается измерение расстояния, так как при обычном определении расстояния между двумя функциями в выбранных точках понятие сходимости совпадает со сходимостью к решению. Для линейных структур моделей можно использовать сумму квадратов разностей соответствующих параметров математического описания.

Сходимость многорядных алгоритмов МГУА в задаче идентификации доказана для всех трех указанных типов сходимости, причем процесс сходимости к «точке сгущения» напоминает процесс установления равновесного состояния в системе стабилизации. Сходимость применительно к задачам прогнозирования еще не изучалась. Здесь процесс подобен процессам в следящих системах, и вместо точки сходимости следует рассматривать геометрическое место точек установившегося движения, называемое трендом. Не исследована еще сходимость алгоритмов с вычислением остатков.

2.6.6. САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ПРИ НЕПОЛНОМ ИНФОРМАЦИОННОМ БАЗИСЕ

Если исследуемый объект содержит M входных величин, связанных между собой f уравнениями, то для полного математического описания его достаточно $m \geq (M - f)$ переменных. Остальные переменные могут быть исключены как промежуточные. Если это известно априори, то для получения модели объекта достаточно m неколлинеарных переменных.

При помощи МГУА в случае наличия помех находится модель с неполным составом факторов. Это объясняется тем, что существенные факторы взаимосвязаны. Хотя связи остаются неизвестными, это не мешает самоорганизации модели. В результате самоорганизации модели в качестве аргументов (модели с неполным информационным базисом) выбирается небольшое число переменных. Содержание кислорода в реке, например, было предсказано с точностью в 6 % по электропроводности воды и содержанию щелочей [24]. Описания модели, получающиеся в результате самоорганизации, облегчают задачу прогнозирования в случае, когда определенные существенные переменные трудно измерить. Их влияние может быть учтено при помощи других переменных. Это еще раз указывает на то, что модель, пригодная для прогноза, не обязательно должна быть физической, пригодной для управления. Так, модель урожая пшеницы содержит всего 2—3 фактора (аргумента), хотя известно, что урожай зависит, по крайней мере, от 50 существенных переменных [87].

Пример 11. Модель процесса выплавки стали. При выплавке стали содержание углерода в момент перехода в жидкое состояние является важной характеристикой, которая должна выдерживаться в достаточно узких пределах. Модель $y = a_0 + a_1u$, где y — содержание углерода; u — основность шлаков (CaO/SiO_2), статистически хорошо оценивалась и давала хорошие результаты также и при интерполяции. Од-

нако ее применение привело к неудачам, так как содержание углерода обуславливается долей чугуна в шихте, которая не измерялась и не вошла в уравнение регрессии. Поэтому рекомендуется выбирать множество используемых при самоорганизации воздействий достаточно большим в соответствии с неопределенностью априорного знания об объекте. С помощью алгоритмов МГУА выбираются наиболее существенные аргументы. Если число используемых при самоорганизации воздействий велико, то должен быть произведен предварительный отбор, который можно выполнить при помощи дисперсионного, корреляционного (особенно рангового) анализа или с помощью проверки значимости в соответствии с распределением Стьюдента.

Выбор границ системы, подлежащей моделированию. Практически нельзя указать границы моделируемой системы так, чтобы ее модель была в точности автономной, т. е. описывалась замкнутой (определенной) системой уравнений. Это противоречило бы теореме Геделя [31]. В то же время идея о создании некоторой очень большой системы сбора информации часто указывается как единственный путь к получению долгосрочных прогнозов. Так, метеорологи установили в Северном полушарии тысячи измерительных станций, но получить прогнозы могут с упреждением только на 5—7 сут.

Границы (множество переменных) следует выбирать прагматически, с использованием алгоритма ОСА (см. разд. 3.5.4). То множество достаточно, при котором алгоритмы самоорганизации дают достаточно глубокий минимум системного критерия (порядка $D_{\min} \leq 10^{-5}$). Некоторые из подсистем могут не войти в эти границы (см. разд. 3.3). Возможность объективного определения оптимальной области моделирования и модели оптимальной сложности определяет преимущество метода самоорганизации по сравнению с имитационным методом, где используются исключительно физические модели.

2.6.7. ИМИТАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

С помощью имитационных методов моделирования можно прогнозировать приближающиеся опасности. Так, модели динамики мира Дж. Форрестера указали на приближение энергетического и экологического кризисов. Сейчас предупреждением являются прогнозы повышения уровня мирового океана под действием «парникового эффекта». Согласно имитационной модели уровень океана к 2000 г. поднимется на 1,5 м [3].

Прогноз можно объективно проверить методами самоорганизации. Сравнение различных принципов построения моделей имеет смысл только в рамках одной и той же области применения и по отношению к одному и тому же исследуемому объекту. Результаты имитационных методов моделирования и самоорганизации моделей можно оценить, как примерно одинаковые [10, 66, 105].

Точность прогнозов, получаемых по имитационным методам, зависит от адекватности отображения реальной системы субъективно

принятыми уравнениями, поэтому при прочих равных условиях долгосрочные прогнозы, полученные при помощи имитации, не могут быть более точными, чем прогнозы, полученные при помощи самоорганизации.

Гибкость моделей по отношению к новым ситуациям и реализациям. Новая информация об исследуемом объекте и новые ситуации требуют при имитации расширения модели. Гибкость имитации обеспечивается расширением соответствующей блочной структуры с применением программы адаптации. Модели самоорганизации при изменении выборки данных и даже при добавлении воздействий получают повторением вычислений на ЭВМ. Очевидно, что сравнение полученных моделей при таком подходе затруднительно.

Многообразие моделируемых ситуаций (или сценариев) определяет широту возможной области применения полученных моделей. В то время как при имитации вырабатываются различные сценарии, причем лицо, синтезирующее модель, дедуктивно определяет структуру модели, обладающую соответствующими степенями свободы (параметры, структуры, блоки), при самоорганизации получается модель, которая определена для заданной выборки данных (таблицы наблюдений) с оптимальной сложностью и с учетом оценки коэффициентов модели. В этом отношении имитация имеет некоторое преимущество перед самоорганизацией.

Реализуемость моделирования. Для успешного осуществления имитационного моделирования необходима подходящая алгоритмическая модель, а также соответствующая программа для ЭВМ, составление которой является трудоемким процессом. Общность уже составленных программ, несмотря на их блочную структуру, в общем низка. Для новых задач моделирования нужны новые программы. От пользователя требуются хорошие естественнонаучные, системно-теоретические, вычислительные и математические знания.

В противовес этому самоорганизация зависит только от внутреннего программного обеспечения, знать которое пользователю нет необходимости; при этом от него не требуется специальных профессиональных знаний, в частности, в области математики, теории систем и вычислительной техники. В принципе, программы самоорганизации применимы для разных задач моделирования. Реализуемость, измеряемая как вероятность P_0 достижения поставленной цели за заданное время T_0 , при самоорганизации выше, чем при имитации [80].

Стоимость построения модели. Издержки при самоорганизации значительно меньше, чем при имитации. Они в основном состоят из расходов на подготовку и оценку расчетов и, особенно, на вычислительное время. На построение экологической модели ELM (Ecosystem Level Model) в США потребовалось 20 человеко-лет работы ученых, при этом не учитывалось время, затраченное на дополнительные опыты. Ежегодно требовалось 1,5 млн. долларов.

Объем эмпирической информации. Принципиально важно подчеркнуть, что информация, требующаяся для имитации, достаточна также для самоорганизации. Для прогноза хода экологического процесса самоорганизация более выгодна благодаря более низким издержкам при более высокой точности и реализуемости [68]. Напротив, имитацию следует предпочесть в тех случаях, когда нужно проверить гипотезы, т. е. когда ожидается вклад в построение теории. Но и в этом случае не следует отказываться от возможностей самоорганизации: необходимо использовать ее для дополнения, увеличения и сравнения априорной информации. Очевидно, что синтез всех способов построения модели в едином комбинированном методе был бы самым эффективным. При этом самоорганизация должна применяться для отдельных избранных блоков модели, о которых нет достаточной априорной информации. Помимо этого, самоорганизация может выполнять для целей имитации такие новые функции:

обоснование выбора существенных факторов [алгоритм ОСА (разд. 3.5.4)];

сравнение различных вариантов модели.

Что предлагает для долгосрочного прогноза метод имитационного моделирования? Имитационные методы основаны на построении физических моделей, подобных уравнениям математической физики. В этих моделях уравнения выражают субъективные представления автора модели о процессах, происходящих в исследуемом объекте. Ничего другого не остается, как пользоваться физическими моделями, предлагаемыми имитационным моделированием.

Легко убедиться в том, что все физические модели в задаче долгосрочного количественного прогноза обладают весьма малой помехоустойчивостью. С увеличением времени упреждения прогноза ошибки, вызванные неточностью измерений и неполным учетом взаимодействующих факторов, быстро возрастают. В частности, если прогноз ведется при помощи пошагового интегрирования разностных уравнений, то он быстро застывает, т. е. повторяет одни и те же значения, что не соответствует реальному живому процессу. Таким образом, физические модели (а вместе с ними и имитационные методы) для количественного и детального долгосрочного прогноза непригодны.

Что предлагают методы самоорганизации моделей на ЭВМ для получения долгосрочных и детальных прогнозов? Имитационные методы применяют для решения задач прогноза при отношении полезный сигнал/помеха более 10 : 1. В задачах, где помехи очень велики, они пригодны только для исследования объекта (выяснения, что и на что влияет) и цели краткосрочного прогноза. Модельер оперирует в своем сознании только физическими моделями. Следовательно, он не может выбрать долгосрочный и детальный прогноз ни сам, ни с помощью имитационных моделей. Такой прогноз может дать только ЭВМ, с которой человек общается на языке постановки общих крите-

риев выбора (селекции) модели, т. е. прогноз могут дать методы самоорганизации моделей.

Объяснение помехоустойчивости алгоритмов самоорганизации простое: алгоритмы позволяют оптимизировать размеры области моделирования (т. е. выбрать число уравнений, а также сложность каждого из них) так, чтобы получить минимум заданного ансамбля или иерархии критериев. Чем больше помехи, тем меньше область и проще уравнения модели.

2.6.8. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КРИТЕРИЕВ И АЛГОРИТМОВ МГУА

Очевидно, что на помехоустойчивость самоорганизации оказывают влияние имеющаяся априорная информация, выбор опорных функций, критериев селекции и их математического выражения, а также особенности алгоритма МГУА.

Для определения помехоустойчивости заданной модели (например, полинома) применяется вычислительный эксперимент, схема которого показана на рис. 2.20

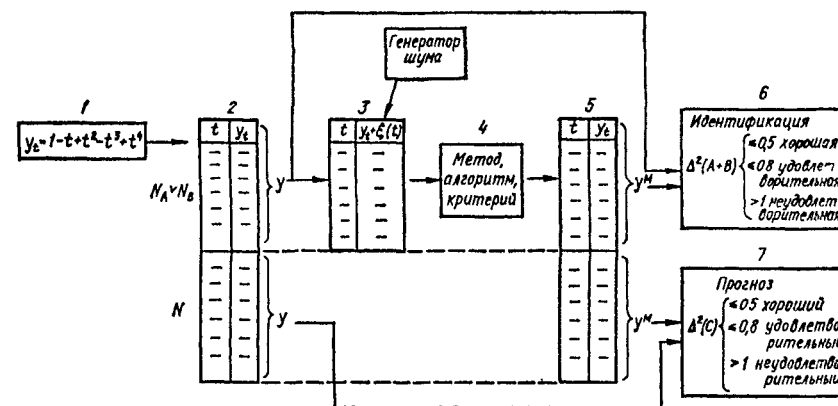


Рис. 2.20 Схема вычислительного эксперимента для определения помехоустойчивости критериев или алгоритмов МГУА.

1 — исходный полином (пример), 2 — таблица точных данных, полученных при помощи полинома, 3 — часть таблицы, где добавляется помеха с заданными амплитудой и вероятностным распределением, соответствующим интересующему нас объекту, 4 — метод, алгоритм или критерий, исследуемый на помехоустойчивость, 5 — таблицы результатов, полученных по модели, 6, 7 — оценка алгоритма соответственно идентификации и прогноза

Если q_Φ и $q_{пр}$ — фактические данные и прогноз, то критерий для прогноза

$$\Delta^2(C) = RR = \frac{\sum_{i=1}^{n_C} (q_\Phi - q_{пр})^2}{\sum_{i=1}^{n_C} (q_\Phi - \bar{q}_\Phi)^2} = \begin{cases} < 0,5 & \text{— хорошо;} \\ < 0,8 & \text{— удовлетворительно;} \\ > 1 & \text{— прогноз несет потребителю дезинформацию.} \end{cases}$$

При $n_c \geq 10$ и $RR \leq 1$ прогноз может быть занесен в «Золотую книгу», если он сохранит эти показатели и на реальном объекте, где помехи могут быть другими. Кривые, полученные в результате вычислительных экспериментов, показаны на рис. 2.21. Увеличение амплитуды шума уменьшает сложность оптимальной модели, полученной при помощи алгоритмов МГУА. Именно в этом можно усмотреть общность задач связи и самоорганизации. В соответствии с теоремой Шеннона о канале с шумом полосу пропускания приемника следует уменьшить при увеличении амплитуды помех. Аналогично при

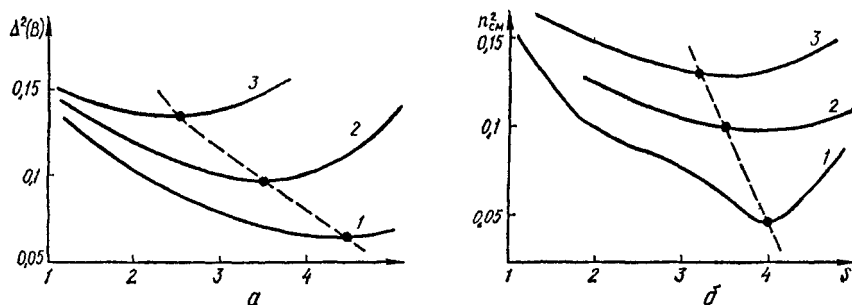


Рис. 2.21. Кривые, показывающие уменьшение сложности структуры оптимальной модели S [при увеличении мощности помех $\xi(t) = 1, 2, 3$] для критериев $\Delta^2(B)$ (а) и $n_{см}^2$ (б)

большой шумовой составляющей данных рекомендуются линейные регрессии, так как линейные уравнения наиболее пригодны для прогнозирования при сильно зашумленных данных и большом интервале упреждения прогноза.

Выбор предельного значения мощности помех, при которой еще возможна структурная идентификация физической модели (результаты вычислительных экспериментов). Структура моделей-претендентов, перебираемых по критерию, изменяется дискретно:

$$q_0 = a_0; \quad (1)$$

$$q_0 = a_0 + a_1 q_{-1}; \quad (2)$$

$$q_0 = a_0 + a_1 q_{-1} + a_2 q_{-2}; \quad (3)$$

$$q_0 = a_0 + a_1 q_{-1} + a_2 q_{-2} + a_3 q_{-3}. \quad (4)$$

Допустим, что при помощи самоорганизации восстанавливается физическая модель маятника, разностное уравнение которого имеет следующий вид:

$$q_0 = a_0 + a_1 q_{-1} + a_2 q_{-2} + \xi(t),$$

где q — угол отклонения; $\xi(t)$ — помехи в устройстве измерения угла, т. е. соответствует третьей модели

При увеличении мощности помех $\xi(t)$ минимум критерия регулярности будет соответствовать истинной модели только до тех пор пока мощность помех приблизительно не будет больше половины мощности полезного сигнала:

$$\xi^2(t) \leq 0,5q^2(t).$$

При увеличении помех минимум критерия будет соответствовать следующей по сложности: $q_0 = a_0 + a_1 q_1$, т. е. второй модели. При дальнейшем увеличении мощности помех, приблизительно при

$$\xi^2(t) = 5q^2(t),$$

минимум критерия соответствует еще более простой первой модели. Здесь уже алгоритм МГУА в качестве модели оптимальной сложности выбирает среднее значение переменной, т. е. отказывается работать

При поиске оптимальной модели на плоскости двух критериев (см. рис. 2.16) в симметричной форме (основного $n_{см}^2$ и регуляризирующего $\Delta^2(B)$) помехи могут превосходить сигнал в пять раз.

Указанные цифры предельного отношения помеха/сигнал зависят от дискретного множества моделей-претендентов и формы сигнала. Они показывают только порядок основного показателя помехоустойчивости.

Таким образом, задача структурной идентификации физической модели может быть решена по алгоритмам МГУА только при малых помехах, мощность которых ориентировочно в 2 раза меньше мощности сигнала. Задача самоорганизации прогнозирующей модели оптимальной сложности решается по алгоритмам МГУА при мощности помех, в несколько раз превосходящей мощность сигнала. Аналогично этому алгоритм ОСА открывает структуру физической модели или структуру модели оптимальной сложности в виде системы уравнений приблизительно при тех же оценках отношений мощности помехи и сигнала.

Многокритериальный выбор модели и применение симметричных критериев являются основным средством повышения помехоустойчивости алгоритмов самоорганизации модели в случае, когда о помехах нет специальной информации. Потому при зашумленных данных модели нужно выбирать не по одному критерию, а по иерархии или ансамблю критериев. Практика применения самоорганизации показывает, что выбор внешнего критерия селекции не является таким критическим и при малых помехах различные критерии приводят к выбору одной и той же модели.

2.6.8.1. Симметричные критерии для повышения помехоустойчивости МГУА. Многокритериальный выбор модели оптимальной сложности резко повышает помехоустойчивость алгоритмов МГУА [37]. Установлено, что помехоустойчивость симметричных и комбинированных критериев всегда выше, чем несимметричных и одиночных. Симметричный критерий минимума смещения вида

$$n_{см}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n=n_A+n_B} (y_A - y_B)^2}{\sum_{i=1}^n y_{\Phi i}^2} \rightarrow \min$$

обладает повышенной помехоустойчивостью. Здесь индексы указывают части таблицы, на которых определяются оценки коэффициентов модели; $y_{\phi i}$ — фактическое (табличное) значение процесса. Целесообразно симметризовать также критерий регулярности, если вычислять его по формуле

$$\Delta^2(AB) = \sum_{i=1}^{n_B} (\hat{y}_A - y_{\phi})^2_i + \sum_{i=1}^{n_A} (\hat{y}_B - y_{\phi})^2_i = \Delta^2(B/C) + \Delta^2(A/B) \rightarrow \min.$$

Он равен сумме двух обычных критериев регулярности, соответствующих случаю, когда части A и B выборки, равные друг другу, попеременно используются в качестве обучающей и проверочной выборки. Предложен еще один критерий регулярности симметричного типа [37]

$$S^2 = \Delta^2(AB) = \sum_{i=1}^{n_A+n_B} (\hat{y}_A - y_{\phi})^2_i + \sum_{i=1}^{n_A+n_B} (\hat{y}_B - y_{\phi})^2_i \rightarrow \min,$$

где y_{ϕ} — фактические данные.

В нем по оценке коэффициентов, полученных на A и B , вычисляются ошибки на всех данных. Критерий более помехоустойчив, чем обычные несимметричные критерии. Это объясняется тем, что S^2 является одновременно комбинированным критерием, что также способствует помехоустойчивости МГУА:

$$S^2 = \Delta^2(AB) = n_{см}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n_A+n_B} (\hat{y}_A - y_{\phi})(\hat{y}_B - y_{\phi}) \rightarrow \min.$$

2.6.8.2. Перспективы дальнейшего повышения помехоустойчивости самоорганизации прогнозов. Повышение помехоустойчивости методов, алгоритмов и критериев самоорганизации прежде всего должно быть достигнуто за счет перенесенных результатов общей теории связи (теории информации) в моделирование.

Алгоритмы самоорганизации прогнозирующих моделей обеспечивают помехоустойчивость, при которой помеха превышает сигнал приблизительно в 5 раз. Обработка исходных данных по схеме корреляционного радиоприемника увеличивает помехоустойчивости еще в 20 раз, т. е. возможно создание алгоритмов, в которых помеха превышает сигнал в 100 раз. Это не должно нас удивлять, так как связисты уверенно поддерживают связь с космическими кораблями вблизи Сатурна, не говоря уже о кораблях на околоземных орбитах. Почему же не использовать этот опыт, для того чтобы получить истинную модель экосистемы оз. Байкал или других водных объектов?

Почему так зашумлены экологические, экономические и другие сложные объекты? Биологические измерения, необходимые для долгосрочных экологических прогнозов, ведутся с большими перерывами, время от времени, причем с помощью весьма несовершенных методов и приборов. Ошибка измерений и расчета средних значений переменных доходит до половины измеряемой величины, а в некоторых

случаях — в несколько раз превышает ее. Например, весьма важной величиной, характеризующей биологические процессы, является так называемая продукция органического вещества под действием света. Метод измерения продукции не учитывает перемещения и перемешивания водной массы, поэтому измеряемая величина становится меньше действительного значения продукции в несколько раз (5 и более). Это замечено на всех водохранилищах, озерах и морях.

И все же главные помехи вносит не несовершенство приборов и методики измерений, а неполный учет взаимодействующих переменных. Пусть у нас имеются уравнения задачи хищник — жертва, в которой щуки поедают плотву. Согласно модели щуки сначала размножаются, а количество плотвы уменьшается. Затем щуки начинают голодать и их количество быстро падает. Начинается период размножения плотвы и т. д. Информационная база моделей всегда неполная. Определить оценки коэффициентов уравнений, если пользоваться данными реального водоема, часто просто невозможно. Оказывается, щуки питаются не только плотвой, что их вылавливают и, кроме того, что плотва гибнет, так как ее поедают не только щуки и т. п. Отсутствие полного учета абсолютно всех взаимодействий является основной причиной зашумленности задач экологического процесса, так как все неучтенные в модели воздействия на процесс относятся к разряду помех или шума.

Отношение полезный сигнал/помеха в реальных экологических задачах составляет около 0,1, т. е. помехи могут в 10 раз превосходить полезный для модели сигнал. И тем не менее положение экологии не самое худшее: то же отношение в задачах прогнозирования погоды составляет величину порядка 0,01 (помехи в 100 раз превышают полезный сигнал).

Глава 3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И КРАТКОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ НА ОСНОВЕ САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ

3.1. ФИЗИЧЕСКИЕ И НЕФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1.1. САМООРГАНИЗАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Физическая модель сложного объекта определяется как его математическое описание (в виде уравнения или системы уравнений), соответствующее по теоретическим представлениям экспертов механизму его действия, или адекватное объекту.

В простых случаях представления экспертов не расходятся, поэтому понятие физической модели определяется таким образом точно. Например, колебания маятника описываются известным дифферен-

циальным уравнением второго порядка, где выходной величиной служит угол отклонения оси маятника от горизонтали, а входным внешним воздействием — момент силы, приложенной к его оси.

В более сложных случаях в объекте можно указать несколько закономерностей, также определяемых аналогично, по законам математической физики. Систему таких закономерностей, если она достаточно полна, также можно назвать физической моделью сложного объекта

В экологии, экономике и технике обычно рассматриваются устойчивые объекты моделирования. Физическая модель устойчивого (длительно существующего) объекта также устойчива, т. е. ее решение имеет затухающий характер. Поэтому самоорганизация физической модели в виде системы дифференциальных или разностных уравнений может иметь своей целью либо идентификацию структуры и параметров объекта (выполняемую с познавательной целью или для решения задач управления), либо краткосрочный прогноз на 1—3 шага дискретизации времени вперед. Для долгосрочного прогноза на 10 или более шагов вперед физическая модель непригодна, так как в силу несовершенства модели ошибка прогноза с каждым шагом растет.

Физическая модель (для идентификации объекта или краткосрочного прогноза) может быть получена при помощи самоорганизации только при значительном объеме априорной информации об объекте. Получение физической модели при очень малой априорной информации называется *открытием закономерностей*. Здесь требуются особые алгоритмы самоорганизации (разд. 3.5.7 и 3.5.8). Рассмотрим вопрос о самоорганизации физической модели при помощи обычных алгоритмов МГУА.

Для самоорганизации физической модели не располагаем абсолютно помехоустойчивым критерием. Критерии МГУА и критерий минимума смещения $n_{см}^2$ отражают только те или иные стороны физической модели (например, ее непротиворечивость на разных выборках данных). Они дают возможность найти физическую модель только в том случае, если:

среди моделей-претендентов, подлежащих перебору по критериям, содержится модель, которая по составу переменных, классу уравнения и виду опорной функции соответствует физической модели;

в ансамбле критериев перебора моделей-претендентов участвует критерий, отражающий некоторое свойство (признак) физической модели, например, ее непротиворечивость (критерий минимума смещения);

среди переменных, предложенных машине в таблице исходных данных, нет величин, тесно коррелированных с величинами, участвующими в законе (ориентировочно коэффициент взаимной корреляции $K < 0,9$);

найден геометрическое место минимумов критерия $n_{см}^2$.

Доопределение физической модели экспертами. Последние два необходимых условия могут быть ослаблены, если в конце алгоритма самоорганизации предусмотрен этап доопределения физической модели экспертами. В моделях, полученных при помощи самоорганизации, каждый фактор, выбранный машиной, является представителем целого множества других факторов, коррелированных с ним, т. е. изменяющихся во времени подобным образом [45]. При доопределении физической модели человек принуждает машину принять в качестве такого представителя именно факторы, которые соответствуют его представлениям о физике действия объекта. Перебор моделей после самоорганизации уже небольшой.

При выполнении других условий (кроме условия отсутствия коллинеарных переменных) истинная модель всегда будет находиться среди лучших по критерию моделей, и эксперт легко обнаружит ее среди небольшого числа моделей на выходе алгоритма самоорганизации. С увеличением мощности помех (неточности данных) и при неполном информационном базисе (т. е. при отсутствии данных о каком-либо существенном факторе, входящем в физическую модель) самоорганизация может предложить экспертам ряд наименее противоречивых моделей, среди которых уже не будет истинного физического закона. Задача доопределения модели в этом случае затрудняется, так как эксперты могут выбрать только некоторые частичные закономерности.

При доопределении модели эксперты указывают физическую модель непосредственно или в соответствии с геделевским подходом (см. разд. 2.1.3.3) договариваются об окончательном выборе физической модели по некоторому критерию более высокого уровня. В качестве такого предлагался критерий экзогенности переменных, выбирающий модель по признаку наличия в ней причинно-следственной связи (разд. 3.5), а также критерий баланса прогнозов.

3.1.2. САМООРГАНИЗАЦИЯ НЕФИЗИЧЕСКИХ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ

В соответствии с приведенной в разд. 1.1.4 постановкой задачи прогнозирования переменную, подлежащую прогнозу, можно рассматривать как выходную величину некоторой динамической управляемой системы, подверженной действию случайных помех. В результате самоорганизации получается математическая модель динамической системы, позволяющая преобразовать входной вектор $u(t)$ в выходной вектор $y(t)$. В зависимости от априорной информации об исследуемой системе могут быть получены модели статических систем (разд. 3.2), динамических систем с сосредоточенными (разд. 3.3) и распределенными (разд. 3.4) параметрами.

Получаемые при помощи самоорганизации прогнозирующие мо-

дели представляют собой дифференциальные уравнения в обычных или частных производных или их конечно-разностные аналоги. Класс уравнений и вид опорных функций в указанных моделях выбирается в соответствии с особенностями моделируемого объекта. Например, для циклических процессов, т. е. для процессов с сезонными колебаниями, широкое применение находят тригонометрические функции. Гармонические алгоритмы МГУА часто оказываются наилучшими среди других алгоритмов для долгосрочного одноуровневого прогноза (разд. 3.5.6). Во всех указанных случаях следует различать модели для краткосрочного прогноза (и идентификации объекта) и модели для долгосрочного прогноза.

Различие моделей легко обнаруживается уже при первых попытках самоорганизации моделей оптимальной сложности. Оказывается, что для моделей краткосрочного прогноза машина выбирает:

- 1) физические модели, где (в случае отсутствия процедуры доопределения) некоторые из переменных могут быть заменены коллинеарными с ними переменными;
- 2) высокочастотные, быстро изменяющиеся факторы;
- 3) полный информационный базис (все множества факторов физической модели), т. е. сравнительно большое число факторов;
- 4) переменные с одним интервалом усреднения (например, только среднегодовые значения).

Для моделей долгосрочного прогноза машина выбирает:

- 1) нефизические модели, определяемые как уравнения, отличающиеся от уравнений математической физики и содержащие только часть факторов [111];
- 2) низкочастотные, медленно изменяющиеся факторы;
- 3) сокращенный информационный базис (сравнительно малое число факторов);
- 4) переменные с двумя-тремя интервалами усреднения переменных (например, среднегодовые и среднесезонные значения).

3.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ФАКТОРОВ

Среди объектов, подлежащих моделированию, встречаются такие, в которых прогноз некоторой выходной переменной может быть достаточно точно определен только по информации об изменении этой переменной на некотором интервале времени наблюдения. Замечено, что таким свойством обладает прогноз стока равнинных рек [29]. Объясняется это тем, что в таких объектах действует много внутренних корреляционных связей. Минимальное число выходных переменных (или число степеней свободы) модели определяется неравенством [26] $m \geq (M - f)$, где M — общее число характеристических переменных объекта; f — число связей. В указанных объектах $m = 1$, т. е. M больше f всего на единицу, что и позволяет получать прогнозы любой одной из переменных (например, годового стока реки) толь-

ко по ее предыстории без учета данных об изменении других величин.

При прогнозировании урожая пшеницы $m = 2$ (для некоторых выходных переменных $m = 3$) [85, 86]. Связи f при самоорганизации остаются нам неизвестными, поэтому величину m определяют из опыта прогнозирования по алгоритмам МГУА. Машина выбирает столько переменных и такие из них, которые дают минимум критерия селекции. Указанные выше значения m получены таким образом.

В моделях прогноза погоды, глобальной динамики мира, экономики и других задачах следует прежде всего сократить число уравнений и факторов и оставить только самые непротиворечивые уравнения (т. е. равноточные на разных выборках данных; подробнее см. разд. 3.5) и самые информативные факторы и тем самым перейти к прогнозу малого числа хорошо прогнозируемых ведущих (характеристических) выходных переменных по малому числу факторов. Все другие интересующие нас переменные прогнозируются в функции ведущих факторов и времени (по однорядным алгоритмам МГУА).

3.1.3.1. Обоснование целесообразности применения нефизических моделей при помощи аналогии с каналом связи. Теория самоорганизации нефизических прогнозирующих моделей связана с основными положениями общей теории связи: в ней действует теорема Шеннона для каналов связи при наличии помех [37]. Как в связи, где при увеличении помех следует уменьшать полосу пропускания приемника, так и в моделировании для достижения наибольшей точности необходимо упрощать структуру модели. Физическая модель является оптимальной только при отсутствии помех и при полном информационном базисе.

В соответствии с теорией информации, где повышение помехоустойчивости приводит к уменьшению пропускной способности, повышение уровня шумов приводит к уменьшению пропускной способности, уменьшению числа уравнений и упрощению структуры прогнозирующей модели, получаемой в результате самоорганизации. Как показывают тестовые вычислительные эксперименты (разд. 4.1.8), алгоритмы самоорганизации при определенном выборе их структуры и вида критериев обладают высокой помехоустойчивостью: помехи могут в несколько раз превышать полезный сигнал, лишь незначительно меняя результат. Объясняется это тем, что размеры области моделирования (т. е. число уравнений модели) и сложность модели (т. е. число и степень слагаемых в каждом уравнении) при самоорганизации не назначаются человеком по его представлениям о механизме действия объекта, а выбираются машиной в процессе перебора вариантов. Машина выбирает физическую модель в качестве самой лучшей только в том случае, если она действительно подходит для достижения минимума ансамбля или иерархии заданных критериев.

3.2. САМООРГАНИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

При самоорганизации алгебраических моделей таблица наблюдений содержит реализации выходной величины y и входных величин v_i , $i = 1, \dots, m$, наблюдаемых в соответствующие моменты времени, а определяемая модель $y = f(v_1, \dots, v_m)$ отображает статистические системы и системы в установившемся состоянии. Имеющаяся априорная информация используется для выбора обобщенных аргументов v_i , частной модели и рекомендации для получения более сложных вариантов модели. Основные принципы самоорганизации модели на ЭВМ изложены в гл. 2. Для углубления понимания самоорганизации алгебраических моделей, а также для показа ряда возможных при этом проблем рассмотрим примеры.

Пример 12. Модель печи для плавления свинца. Для получения зависимости производительности печи для плавления свинца y от воздействующих факторов u_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, использовался алгоритм МГУА с линейными и нелинейными частными моделями.

а. Линейная частная модель. С использованием критерия регулярности $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ были получены показанные на рис. 3.1. графики зависимости точности моделей σ от числа точек в обучающей выборке n_A . При этом были выбраны следующие обобщенные аргументы:

$$v_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, 8; \quad (1)$$

$$v_i = u_i; \quad v_{8+i} = u_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, 8; \quad (2)$$

как уравнение (2), а также

$$v_{16+j}(t) = v_j(t-1), \quad v_{32+j}(t) = v_j(t-2), \quad j = 1, 2, \dots, 16. \quad (3)$$

При расширении числа аргументов за счет введения квадратичных зависимостей улучшается аппроксимация и, напротив, при учете временных запаздываний не получают существенного улучшения аппроксимации, поэтому была выбрана следующая модель (рис. 3.1):

$$y = -3370 - 0,945u_1 + 13,32u_6 + 1,625u_7 + 0,00032u_1^2 - 0,0084u_6^2 - 0,001u_7^2.$$

б. Нелинейная частная модель. Если выбрать в качестве частной модели

$$f(v_i, v_k = \exp(c_0 + c_1 \ln v_i + c_2 \ln v_k),$$

то при использовании критерия регулярности получаем

$$y = 1,539u_1^{0,06}u_6^{1,054}u_7^{-0,04}.$$

Из обеих моделей (линейной и нелинейной) следует, что величины расход агломерата u_1 , кг/ч; количество черного свинца u_6 , кг, и шлаков u_7 , кг, оказывают самое сильное влияние на производительность (кг/м³ в день) печи для плавления свинца. При помощи этой модели можно получить нормативные прогнозы возможной производительности печи при заданных значениях указанных выше величин.

Пример 13. Модель управления станом для проката труб. Требуется найти математическую модель в виде зависимости

$$y = f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5),$$

т. е. в виде линейной или нелинейной статической модели [54].

Для самоорганизации математической модели 40 реализаций (табл. 12) были разделены на обучающую $n_A = 20$, проверочную $n_B = 10$ и экзаменационную $n_C = 10$

12. Данные для моделирования процесса проката труб

i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	y_i	i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	y_i
1	2,131	10,41	69,22	73,52	4,30	12,23	21	2,115	10,24	68,77	73,07	4,30	12,22
2	2,034	9,797	69,26	74,10	4,84	11,86	22	2,150	10,45	68,71	73,10	4,39	12,38
3	2,076	9,892	69,06	73,42	4,36	11,72	23	1,919	9,295	68,66	73,06	4,40	10,96
4	2,084	10,09	69,02	73,36	4,34	11,83	24	2,046	9,840	68,63	73,06	4,43	11,64
5	2,057	9,815	68,97	73,32	4,45	11,47	25	1,898	9,261	68,61	73,03	4,42	10,85
6	1,902	9,334	69,01	73,23	4,22	11,07	26	2,094	10,12	68,57	72,97	4,40	11,85
7	2,048	9,806	68,93	73,42	4,22	11,66	27	2,076	10,13	68,62	72,97	4,35	11,88
8	2,062	9,758	68,92	73,26	4,34	11,58	28	2,086	10,22	68,52	72,26	4,34	11,88
9	2,191	10,58	68,82	73,16	4,34	12,43	29	1,981	9,734	68,06	72,87	4,41	11,36
10	2,020	9,691	68,87	73,23	4,46	11,32	30	2,041	10,03	68,11	72,52	4,41	11,72
11	2,005	9,789	68,83	73,12	4,29	11,45	31	2,031	9,864	68,02	72,42	4,40	11,64
12	2,059	10,21	68,86	73,17	4,31	11,74	32	1,952	9,561	67,97	72,31	4,31	11,04
13	2,121	10,21	68,86	73,17	4,31	11,88	33	2,042	9,873	68,17	73,03	4,46	11,67
14	2,041	9,806	68,82	73,13	4,31	11,45	34	2,102	9,855	67,96	72,26	4,30	11,91
15	2,016	9,807	68,81	73,17	4,46	11,47	35	2,046	10,000	67,97	72,32	4,35	11,72
16	2,063	10,063	68,73	73,12	4,39	11,67	36	1,978	9,557	67,97	72,27	4,30	11,31
17	2,057	9,927	68,76	73,16	4,40	11,61	37	2,005	9,631	68,01	72,33	4,32	11,50
18	1,924	9,277	68,73	73,13	4,40	11,07	38	2,047	9,937	68,06	72,43	4,37	11,67
19	2,109	10,05	68,81	73,16	4,31	12,05	39	2,013	9,864	68,06	72,42	4,36	11,60
20	2,143	10,52	68,76	73,01	4,25	12,48	40	2,123	10,37	68,03	72,42	4,39	12,30

последовательности. Выбор оптимальной модели происходил по комбинированному критерию. При этом в следующий ряд селекции выбирались модели с наибольшим индексом корреляции, который вычислялся только для частных моделей, имеющих меньшую среднеквадратичную ошибку аппроксимации по сравнению с предыдущим рядом.

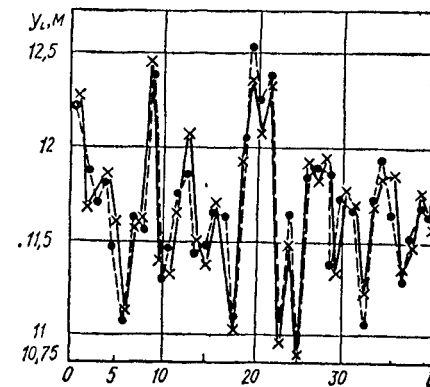


Рис. 3.2. График изменения длины трубы y_i , м, от числа прокаток i :

● — фактические значения, × — оценки, полученные по линейной модели

а. Линейная модель. Для каждой парной комбинации на k -м ряду (см. разд. 2.2.3)

$$y_j^k = \varphi(y_{j1}^{k-1}, y_{j2}^{k-1}), \quad j = 1, 2, \dots, \binom{m_k-1}{2}$$

вычислялись параметры следующей частной модели

$$y_j^k = \begin{cases} c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1}; \\ c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1} + c_2 y_{j2}^{k-1}. \end{cases}$$

Лучшей оказалась модель [54]

$$y = -0,029 + 1,716u_1 + 0,815u_2 - 0,089u_3 + 0,139u_5,$$

у которой на экзаменационной последовательности была получена среднеквадратичная ошибка аппроксимации $\Delta^2(C) = 0,11$ (рис. 3.2).

б. *Нелинейная модель* Для каждой попарной комбинации на k -м ряду были получены следующие оценки частных моделей.

$$y = \begin{cases} c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1}, \\ c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1} + c_2 y_{j2}^{k-2}, \\ c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1} + c_2 y_{j2}^{k-1} + c_3 y_{j1}^{k-1} y_{j2}^{k-1}, \\ c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1} + c_2 y_{j2}^{k-1} + c_3 y_{j1}^{k-1} y_{j2}^{k-1} + c_4 (y_{j1}^{k-1})^2, \\ c_0 + c_1 y_{j1}^{k-1} + c_2 y_{j2}^{k-1} + c_3 y_{j1}^{k-1} y_{j2}^{k-1} + c_4 (y_{j1}^{k-1})^2 + c_5 (y_{j2}^{k-1})^2. \end{cases}$$

Лучшей оказалась модель

$$y = 10,862 + 1,569 y_1^3 + 0,06 y_5^3,$$

причем

$$y_1 = 0,031 - 0,421 y_1^2 + 0,988 y_3^2 - 0,451 y_1^2 y_3^2;$$

$$y_5 = 0,034 + 0,413 y_5^2 + 0,194 y_3^2 + 0,571 y_5^2 y_3^2;$$

$$y_1^2 = 0,002 + 1,011 y_1^1 - 0,011 (y_1^1)^2;$$

$$y_3^2 = 0,013 - 0,508 y_3^1 + 1,374 y_1^1 + 1,735 y_3^1 y_1^1;$$

$$y_5^2 = 0,011 + 0,365 y_5^1 + 0,55 y_3^1 + 0,115 y_5^1 y_3^1;$$

$$y_1^1 = 1784,71 + 140,069 u_1 - 56,207 u_3 - 2,392 u_1 u_3 + 6,847 u_1^2 - 0,44 u_3^2;$$

$$y_3^1 = -120,0 + 1,652 u_3 + 11,407 u_2 - 0,156 u_2 u_3;$$

$$y_5^1 = -7,085 + 0,121 u_5 + 0,711 u_2.$$

Полученное при помощи этой модели уточнение аппроксимации (ошибка на экзаменационной последовательности $\Delta^2(C) = 0,082$) явно не оправдывает существенного возросших затрат вычислительного времени на нахождение нелинейной модели, описываемой полиномом 16-го порядка. Поэтому для оперативного управления следует рекомендовать линейную модель

В обоих случаях существенными факторами оказались: длина заготовки u_1 , длина трубы после первой прокатки u_2 , расстояние между валками перед вторым прогоном u_3 , а также изменение расстояния между валками u_4 .

Пример 14. *Прогноз числа людей, занятых в строительстве.* Для прогнозирования рабочей силы y , требуемой для строительства, можно получить модель

$$y(t) = c_0 \prod_{i=1}^3 u_i c_i a^{\Delta t}$$

по реализациям переменных y , u_1 , u_2 , u_3 за 1960—1970 гг.

а. *Применение метода наименьших квадратов.* Для оценки параметров модели по методу наименьших квадратов функция линеаризировалась при помощи логарифмирования. Отклонения $e_t = y_t^M - y_t$, обусловленные этим преобразованием, оценивались при помощи коэффициентов веса, обратно пропорциональных значениям y_t . Ввиду того что y_t растет с увеличением t , отдаленное прошлое будет учитываться с большим весом, чем близлежащие данные, что нельзя обосновать и что ведет к искажению оценок параметров.

б. *Оценка параметров нелинейной модели.* Оптимальные параметры оценивались на основе принципа максимального правдоподобия с использованием поискового алгоритма [85].

в. *Самоорганизация модели.* В качестве критерия селекции был использован критерий регулярности, а в качестве частных моделей функции

$$f(v_i, v_k) = \exp(c_0 + c_1 \ln v_i + c_2 \ln v_k).$$

В табл. 13 приведены примеры моделей полученных на трех рядах селекции.

Пример 15. *Прогноз роста валовой продукции предприятия.* В качестве выходной величины модели было выбрано отношение $y = X/A$, %, где x — индекс валовой продукции, %, A — индекс числа производственных рабочих, %, который использовался в качестве приблизительной меры производительности труда [101]. Анализ позволяет сделать заключение о влиянии различных входных воздействий на производительность труда, которое выражается формулой

$$f(v_i, v_k) = \exp(c_0 + c_1 \ln v_i + c_2 \ln v_k).$$

13. Модели, полученные при различных способах разделения таблицы данных

Способ разделения таблицы данных	ε	$c_1, 10^{-3}$	$c_2, 10^{-3}$	$c_3, 10^{-3}$	$c_4, 10^{-3}$	$c_5, 10^{-3}$	σ
1	0,001	10,1	—	—30	—1	3	0,692
2	0,005	8,59	1,46	4	—8	—	0,868
3	0,01	8,59	1,46	4	—8	—	0,868
4	0,05	9,99	—	—	—	—7	0,991
5	0,1	9,99	—	—	—	—7	0,991
6	0,01	9,92	—	—	—10	—	0,898
7	0,01	9,96	—	—	10	—	0,975
8	0,01	9,92	—	—	10	—	0,898

Использование этой частной модели привело к более общей модели:

$$y = cu_1^{0,83} u_2^{-0,83} u_{16}^{0,175} u_{17}^{0,175}.$$

Если сделать подстановки $u_1 = X$; $u_2 = A$; $u_{16} = S/A$ и $u_{17} = X/S$, где S — потребление электроэнергии, то получим приближенную формулу $y = X/A$. Тот же результат получим, если исключить из таблицы данных X и A . Самоорганизация по остальным факторам дает тогда модель

$$y = cu_{16}^{1,002} u_{17}^{1,002}.$$

При этом получается полезная приближенная формула:

$$f(v_i, v_k) = c_0 + c_1 v_i + c_2 v_k.$$

Здесь обобщенные факторы получены по значениям множителей u_i , их квадратов u_i^2 , а также по значениям смешанных произведений $u_i u_j$.

При разделении на четные A и нечетные B точки в трех рядах селекции получены следующие оценки коэффициентов и точности модели: $a = 10$; $c_0 = 1069,1$; $c_1 = 0,805$; $c_2 = -0,1884$; $c_3 = 0,056$; $\delta = 0,32$ %; $y = 201,8 \cdot 10^3$ (в 1974 г.); время счета на машине ЕС-1020Т_{мин} ≈ 1 мин.

График зависимости среднеквадратичной аппроксимации, вычисленной по всем наблюдениям, от числа рядов селекции для критериев минимума смещения и регулярности показан на рис. 3.3. В то время как критерий минимума смещения дает острый минимум уже при двух рядах селекции, критерий регулярности приближается к минимуму весьма плавно. При этом помехи вызывают появление в модели добавочных несущественных членов с весьма малыми коэффициентами.

Лучшими моделями оказались при использовании критерия минимума смещения

$$y = 1,427 + 0,01u_{10}u_{17} + 10^{-6}u_5u_{17} \approx 1,427 + 0,01X/A$$

ошибка аппроксимации $\sigma = 0,898$, а при использовании критерия регулярности

$$y = 1,19 + 0,0078u_{16}u_{17} + 0,0021u_{12}u_{14} + f(u_9, u_{11}, u_{17}, u_6u_{17}, u_{12}u_{17})$$

(ошибка аппроксимации $\sigma = 0,837$). Члены, объединенные выражением $f(\dots)$, имеют коэффициенты порядка $10^{-4} \dots 10^{-7}$, которыми можно пренебречь. Если опять применить подстановку $u_{16} = S/A$; $u_{17} = X/S$; $u_{12} = G/A$; $u_{14} = X/G$, где G — величина основных средств производства, и учесть, что все данные приведены в процентах от их значения в базисном году, принятого за 100 %, то получим еще одно приближенное выражение: $y = 1,192 + 0,01 X/A$.

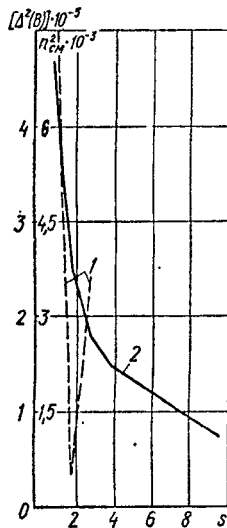
Из изложенного выше видно, что критерий минимума смещения $n_{\text{см}}^2 \rightarrow \min$ имеет сильное избирательное действие, а при использовании критерия регулярности $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ учитывается еще и влияние шума.

В полиномиальной форме модель принимает следующий вид:

$$y = c_0 + c_1u_{16}u_{17} + c_2u_{12}u_{14} + c_3u_{15}u_{16} + c_4u_7u_{15} + c_5u_1.$$

Точность модели исследовалась при 8 различных способах разделения таблицы данных на выборки A и B [23]. Для каждого из них определялось значение параметра ϵ . Параметр ϵ равен наименьшему значению определителя информационной матрицы, для которого она еще может считаться регулярной. Результаты, приведенные в табл. 13, подтверждают возможность восстановления закономерностей по таблице на-

Рис. 3.3. График зависимости точности аппроксимации от числа рядов селекции S для критерия: 1 — минимума смещения; 2 — регулярности



блюдений при помощи самоорганизации. Одновременно оказывается, что выбор ϵ может влиять на чувствительность алгоритма. Выбор слишком малого значения ϵ приводит к излишнему числу рядов, но не дает никакого существенного улучшения модели.

Пример 5а.* Прогноз урожая пшеницы. Особое влияние на урожай пшеницы оказывают до конца 5-й фенофазы (при общем числе фенофаз, равном 9) климатические факторы. Это дает возможность построить модель для прогнозирования урожая пшеницы уже к концу этой фазы по данным испарения влаги (u_1, u_2), солнечного облучения (u_3), длительности пятой фенофазы (u_4), срока посева (u_5) и других факторов.

Полученные линейные модели для трех режимов орошения A, B и C [86, 87]:

$$y_A = 5,91u_3 + 2,06u_4 + 11,13u_1 - 3,65u_2;$$

$$y_B = -0,56u_5 + 0,12u_4 + 16,19u_1;$$

$$y_C = 0,51u_4 + 6,26u_1,$$

могут быть использованы для прогноза будущего уровня при известном развитии культуры до конца пятой фенофазы.

Для более объективного прогноза урожая эта модель была еще дополнена такими биологическими факторами как площадь верхней поверхности листа u_6 и прирост сухого вещества в начале и в конце 5-й фенофазы u_7 . В результате были получены

* Продолжение прим. 5.

следующие модели:

$$y_A = -77,5 + 2,89u_6 + 3,07u_3 - 0,032u_4 - 0,139u_1 + 17,19u_2;$$

$$y_B = 0,048u_7 - 0,503u_3 + 0,079u_6 + 16,05u_2,$$

$$y_C = 32,94 - 0,061u_6 + 0,563u_1.$$

Доминирующее влияние на урожай 5-й фенофазы оказывает солнечное облучение и испарение с листа. Эти модели дали существенное улучшение аппроксимации и прогноза. Они пригодны для практического применения и позволяют на основании прогноза урожая управлять на различных фенофазах орошением и удобрением.

Пример 16. Модель для определения продолжительности плавки металла. Имеется большое число вариантов описанного выше алгоритма МГУА для самоорганизации математических моделей статических систем в виде алгебраических уравнений. Была получена нелинейная модель продолжительности плавки металла в мартеновской печи в зависимости от расхода лома, содержания в жидком чугуне кремния, марганца и серы, расхода кислорода в факеле, потребления тепла во время подготовки, шихтовки, подогрева, засыпки, плавки, доводки плавки и т. д., причем было выявлено определяющее значение расхода кислорода. Полученная модель позволяет проанализировать влияние существенных факторов на изменение режима плавки и себестоимости и, тем самым, существенно повысить эффективность использования основных фондов. На основании этой модели были изменены параметры режима плавки в печах.

Пример 17. Прогноз себестоимости угледобычи. Самоорганизация применяется для прогнозирования себестоимости добычи угля на одном из угольных комбинатов Донбасса. При этом оказалось, что на случайную выходную величину (себестоимость) оказывает влияние большое число входных величин (всего 35); входные величины взаимно коррелированы; каждая входная величина сама по себе оказывает на выходную величину достаточно малое влияние, однако в совокупности они вызывают значительные колебания выходной величины; ввиду краткости времени существования комбината для моделирования в распоряжении имелась небольшая реализация входных и выходных величин.

При помощи самоорганизации были получены прогнозы с заблаговременностью 3 года, ошибка предсказания которых оставалась ниже 0,5 %. Применение же регрессионного и факторного анализа, как и других статистических методов, не дало желаемых результатов.

3.2.2. УВЕЛИЧЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ОБЪЕДИНЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ОБЪЕКТОВ В ОДНОРОДНЫЕ КЛАССЫ

Характерным для многих исследований, особенно в случае экономических систем, является отсутствие необходимого для самоорганизации объема исходной информации. Однако, есть возможность получить информацию о процессах по другим объектам, подобным исследуемому. В этом случае создаются однородные группы исследуемых объектов, для которых необходимо построить адекватные модели. Существуют различные приемы определения однородных классов объектов. Например, принято, что два объекта принадлежат к одному и тому же классу, если оба они могут быть описаны подобными моделями [9]. При этом предполагается, что структура исходной информации для объектов, относящихся к одному классу, одина-

кова, т. е. для каждого i -го объекта имеется m реализаций (y_i^t, u_i^t) , где u_i^t — вектор. Для объектов i и j получены модели

$$y_i^t = f_i(u_i^t); \quad y_j^t = f_j(u_j^t).$$

В качестве меры соответствия выбраны

$$E_{ij} = \sum_{t=1}^m (y_i^t - f_j(u_i^t))^2/m + \sum_{t=1}^m (y_j^t - f_i(u_j^t))^2/m,$$

т. е. средняя сумма отклонений одной из моделей, вычисленная по выходной информации другой модели. Этот критерий можно понимать, как разновидность критерия минимума смещения, причем реализации одного объекта образуют обучающую последовательность A , а реализации другого — проверочную B .

Для n объектов желаемое разделение на классы достигается при помощи следующих друг за другом объединений объектов и групп. Для этой цели необходимо вычислить E_{ij} для всех возможных комбинаций пар объектов. Затем для каждого i -го объекта находится принадлежащий ему элемент с наименьшим рассогласованием. Если справедливо неравенство $\min E_{ij} \leq E_0$, где E_0 — некоторая заданная величина, то тогда оба элемента принадлежат к одному классу, в противном случае — нет. Эта процедура многократно повторяется, пока для заданного E_0 не образуются классы однородных объектов.

При вычислении E_{ij} предполагается, что для каждого объекта имеется m реализаций, что достаточно для получения моделей $y = f_j(u_i^t)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Для малых m такой подход невозможен. В этом случае можно построить общую модель $y_M = f_M(u)$, которая соответствует некоторому усредненному объекту. Если предполагается, что в выражении для t функции достаточно гладкие, то тогда

$$\Delta_i = \sum_{t=1}^m (y_{it} - f_M(u_{it})), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, m,$$

представит средние отклонения отдельных объектов i от усредненной модели. Если, например, y — значение производительности, то $\Delta_i < 0$ означает, что данный объект лежит ниже среднего уровня производительности. Соответственно можно эти объекты разделить на три класса: 1) $\Delta_i \leq -B$; 2) $|\Delta_i| < B$; 3) $\Delta_i > B$. Описанный подход нашел применение для анализа и прогноза производительности труда в энергетике СССР. При этом по данным 98 предприятий было получено 37 параметров. Полученные модели используются в автоматизированной системе планирования производительности труда.

Одно из основных предложений состоит в том, чтобы данные по каждому тресту применять полностью в качестве обучающей последовательности [9]. Для образования проверочной последовательности используются данные по другому тресту, наиболее близкому по своим

характеристикам к первому. Отсюда возникает задача выделения пар трестов, сходных по своим характеристикам. В теории распознавания образов подобная задача называется задачей кластеризации входных изображений.

При помощи алгоритма кластеризации все 98 трестов были разбиты на однородные группы. Задача формирования однородных групп трестов заключалась в последовательном объединении вначале по качественным, а затем по количественным признакам. Основным качественным признаком является специализация работ, выполняемых трестами. Главные управления объединены в семь качественно однородных групп по видам выполняемых работ: строительство сетей линий электропередачи и подстанций высокого напряжения (35 кВ и более); строительство сельских сетей линий электропередачи и подстанций (напряжение ниже 35 кВ); электромонтажные, тепломонтажные и теплоэнергомонтажные работы; общестроительные работы на электростанциях; гидростроительные работы; строительство заводов железобетонных и металлических конструкций.

Внутри однородных групп были сформированы более мелкие однородные группы (по два треста) по близости совокупности влияния факторов на изменение производительности труда. Это позволило уменьшить усреднение результатов моделирования и повысить таким образом его точность. Каждому тресту в пространстве факторов отвечает точка. Критерием сходства может быть расстояние между точками сравниваемых между собой трестов.

Если продолжить приведенные выше рассуждения, то можно для каждого класса объектов найти соответствующую математическую модель и аналогичным образом получить дальнейшее деление объектов на подклассы.

Пример 19. Прогноз производительности труда работников в колхозах (ГДР). Получена модель сельскохозяйственного производства. В области 244 сельскохозяйственных предприятия были разделены на 10 районов. Для каждого района при учете 18 факторов были найдены линейные модели, причем применялись различные критерии (регулярности, минимума смещения) и разные принципы разделения таблицы данных. Учитывались следующие факторы (в расчете на 100 га полезной сельскохозяйственной площади): рабочая сила $v_1 = u_2$; норма расхода $v_2 = u_{16}$; себестоимость работ $v_4 = u_{37}$, марки; себестоимость продукции $v_5 = u_{42}$, марки; число коров $v_6 = u_5$; число свиней $v_7 = u_6$; урожай хлебных культур $v_8 = u_7$, ц; урожай картофеля $v_9 = u_8$, ц; убойный скот $v_{10} = u_{32}$, ц; убойные свиньи $v_{11} = u_{33}$, ц; затраты на корм для 1 животного $v_{12} = u_{30}$, марки; затраты на корма $v_{13} = u_{36}$, марки; капиталовложения $v_{14} = u_{22}$, марки; удой молока на 1 корову $v_{15} = u_{10}$, л; удой молока $v_{15} = u_{10}$, л; цвет молока $v_{16} = u_{11}$; показатель производительности труда $v_{17} = u_8$, пахотная земля t_{18} , га.

Факторы отобраны по критерию наилучшей среднеквадратичной ошибки аппроксимации *. При этом обнаружилось хорошее совпадение существенных факторов, отобранных машинной и указанных экспертами.

Для всех 244 предприятий было найдено 7 общих моделей на основе всех 59 входных факторов. Модели были получены для различных критериев оценки и раз-

* Здесь уместно было бы применить алгоритм ОСА (см. с. 165)

14. Факторы, существенные для каждого из районов

Район	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	n	σ
1	×	×	×	×	×		×			×	×	×	×		×		×	×	17	145,1
2	×	×	×	×	×			×	×		×	×	×	×			×	×	26	102,7
3	×	×	×	×	×	×	×	×				×	×	×		×	×	×	14	140,1
4	×	×	×	×	×		×		×	×			×	×			×	×	24	181,5
5	×	×	×	×	×			×	×	×			×		×	×			22	180,4
6	×	×	×	×	×			×			×	×	×			×	×		32	134,3
7	×	×	×	×	×		×	×	×	×				×					18	78,8
8	×	×	×	×	×	×	×	×		×			×	×	×				38	184,8
9	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×						19	164,5
10	×	×	×	×		×	×			×	×	×		×		×			23	114,5

личных вариантов разделения данных. В результате перебора вариантов была достигнута среднеквадратичная ошибка аппроксимации $\sigma^2 = 200$. По критерию

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^7 \text{sign} [y_i - f_M(u_i)]$$

при $\text{sign } x = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ были выявлены следующие три класса объектов (предприятий) производительностью: 1) выше, чем у среднего предприятия; 2) ниже, чем у среднего предприятия; 3) средней.

В табл. 14 приведены результаты, полученные для отдельных районов.

3.2.3. СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

До сих пор при самоорганизации алгебраической модели структура системы предполагалась заданной априори, т. е. было известно, что система имеет только одну выходную величину и переменная состояния x_k является выходной величиной $y = x_k$. При этом остальные наблюдаемые величины считались входными по отношению к величине y .

В дальнейшем рассматривается случай, когда имеется таблица данных, содержащих p переменных состояния $x_1, x_2, \dots, x_p$, в которой также указаны возможные входные величины $u_j, j = 1, \dots, m$. Структура объекта подлежит определению. Общий (полный) полином статической (т. е. без учета динамики) системы имеет вид

$$\underline{y} = A_0 + A_1 \underline{x} + A_2 \underline{u};$$

$$\underline{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_r); \quad \underline{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_p); \quad \underline{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_m),$$

а вектор $\underline{y}$ получается из составляющих вектора состояний $\underline{x}$, т. е.

$$\underline{y} = S \underline{x}, \text{ где}$$

$$S = \{s_{ij}\}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, \dots, p;$$

$$s_{ij} = \begin{cases} 0; \\ 1, \end{cases} \quad \sum_j s_{ij} = 1.$$

Система линейных уравнений отражает взаимодействие между переменными, т. е. структуру исследуемого объекта. Задачей самоорганизации является одновременное определение структуры модели (матрицы S) и ее параметров. В соответствии с этим синтез модели состоит из трех этапов:

1) определение структуры (необходимо выбрать оптимальное число алгебраических уравнений по реализациям входных переменных и переменных состояния, которые в общем случае зашумлены);

2) оценка параметров (для выбранной системы уравнений следует определить входные переменные и переменные состояния, входящие в уравнения системы, и оценить коэффициенты каждого уравнения);

3) адаптация параметров (если есть возможность, то для полученной модели оптимальной структуры значения параметров, полученные на этапе их оценки, уточняются при помощи соответствующих методов адаптации).

Можно составить большое число возможных систем уравнений, причем каждое уравнение может содержать большое число различных входных факторов и переменных состояния. Поэтому для решения такой задачи целесообразно применение самоорганизации, т. е. перебора вариантов по целесообразно выбранным критериям. Сложность модели определяется, в частности, числом алгебраических уравнений.

3.2.4. СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

При идентификации практически трудно определить, не зависит ли вектор коэффициентов выбранной модели от факторов, не учтенных при моделировании. Если исходные данные зашумлены, то трудно решить, вызвана ли сравнительно большая ошибка моделирования шумом или неадекватностью модели и объекта. При неадекватности модели и объекта можно добиться улучшения, если учесть переменные параметров модели при двухэтапном подходе [35].

3.2.4.1. Проверка адекватности. Для этой цели имеющиеся данные делятся на K групп, причем для каждой из них определенная часть входных величин остается постоянной. При этом вектор выходных величин будет иметь вид

$$\underline{y}' = (y_1, y_2, \dots, y_T) = (\underline{y}^1, \underline{y}^2, \dots, \underline{y}^{K'}), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где

$$\underline{y}' = (y_{N_{i-1}+1}, \dots, y_{N_{i-1}+n_i});$$

n_i — длина реализации i -й группы;

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j; \quad N_0 = 0.$$

Входной вектор $\underline{u}' = (\underline{u}'_v, \underline{u}'_c)$ вместе с $\underline{u}_v^1 = (u_1, \dots, u_{m_v})$ — переменными факторами и $\underline{u}_c = (u_{m_v+1}, \dots, u_m)$ — факторами, которые в пределах данной группы могут считаться постоянными, образуют соответственно матрицы

$$U = \begin{bmatrix} U_v^1 & \dots & U_c^1 \\ \vdots & & \vdots \\ U_v^k & & U_c^k \end{bmatrix},$$

где $U_v^t = \{u_{it}\}$, $i = 1, \dots, m_v$, $t = N_{i-1} + 1, \dots, N_{i-1} + n_i$ — матрица наблюдений переменных входных воздействий типа (n_i, m_v) . Оценка модели по всем точкам

$$\underline{y}' = U_v^t \underline{b}^t,$$

в соответствии с методом наименьших квадратов

$$\underline{b}^t = (U_v^{tT} U_v^t)^{-1} U_v^{tT} \underline{y}^t;$$

$$R_i^2 = (\underline{y}^t - U_v^t \underline{b}^t)' (\underline{y}^t - U_v^t \underline{b}^t).$$

Для групповых моделей можно определить K оценок $\underline{b}^t$

$$\underline{y}^t = \sum_{i=1}^{m_v} b_i^t u_i, \quad \underline{y}^t = u_v^t \underline{b}^t,$$

где

$$\underline{b}^t = (U_v^{tT} U_v^t)^{-1} U_v^{tT} \underline{y}^t;$$

$$R_i^2 = (\underline{y}^t - U_v^t \underline{b}^t)' (\underline{y}^t - U_v^t \underline{b}^t), \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Разность

$$S^2 = R^2 - \sum_{i=1}^K R_i^2 = \sum_{i=1}^K (\underline{b} - \underline{b}^t)' U_v^{tT} U_v^t (\underline{b} - \underline{b}^t)$$

представляет собой разновидность ошибки, которую дает рассеяние оценок коэффициентов групповой модели.

Из выражения $R^2 = S^2 + \sum_{i=1}^K R_i^2$ видно, что сумма квадратов отклонений модели состоит из двух компонент [21]:

1. Суммы сумм квадратов отклонений групповых моделей, которые можно рассматривать как меру рассеяния наблюдений относительно групповых моделей вследствие влияния шума.

2. Меры искажения оценки коэффициентов групповых моделей, вызванного влиянием на коэффициенты модели факторов U_c и имеющимся шумом. Если подход к моделированию правилен, т. е. модель содержит постоянные коэффициенты и не зависит от факторов U_c ,

то дисперсия отклонений, представляющая собой оценку шума, вычисленную для групповых моделей

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^K R_i^2 / (n - Km_v),$$

должна быть приближенно равна оценке шума, обусловленного смещением:

$$\sigma_2^2 = S^2 / (Km_v - m_c),$$

т. е. $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2$. В противном случае справедливо неравенство $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

При этом возникает возможность статистически проверить с помощью F -распределения адекватность полученной модели с постоянными коэффициентами из следующих соображений. Значение критерия согласия $F = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$ имеет F -распределение с $Km_v - m_c$ и $n - Km_v$ степенями свободы. При $F \leq F_{кр}$ нет никакого основания отвергать адекватность модели с постоянными коэффициентами. Алгоритм можно представить в виде одно- или двухэтапной процедуры. На первом этапе влияние факторов U_c еще не учитывается. Оно учтено на втором этапе.

3.2.4.2. Получение оценок для модели с переменными коэффициентами. Нужно оценить модель вида

$$y = \sum_{i=1}^{m_v} u_i b_i(\underline{u}_c),$$

где

$$b_i(\underline{u}_c) = \sum_{j=m_v+1}^m c_{ij} u_j,$$

а c_{ij} — оценки коэффициентов модели. При этом надо оценить нелинейную полную модель

$$y = \sum_{i=1}^{m_v} \sum_{j=m_v+1}^m c_{ij} u_i u_j.$$

Для определения величины c_{ij} можно использовать k оценок b_i^t , полученных на первом этапе. При оценке $\underline{c}_k^T = (c_{km_v+1}, \dots, c_{km})$ модели получим

$$b_k = \sum_{j=m_v+1}^m c_{kj} u_j;$$

$$\underline{c}_k = (U_c^T U_c) U_c \underline{b}_k,$$

где

$$\underline{b}_k^T = (b_k^1, b_k^2, \dots, b_k^{m_v}).$$

При таком подходе возникает вопрос, насколько значения c_{ij} совпадают с оценками, которые получаются после первого этапа алгоритма

для модели

$$y = \sum_{k=1}^M d_k V_k.$$

Здесь обобщенные переменные $v_k = u_i u_j$,

где $i = 1, \dots, m_v; j = m_v + 1, \dots, m;$

$$k = 1, \dots, M \text{ и } M = m_v(m - m_v).$$

Доказаны две следующие теоремы [23, 46].

1. При точных наблюдениях (т. е. шум тождественно равен нулю) оценки моделей полностью совпадают.

2. В общем случае эти оценки идентичны только при условии, что для информационных матриц обеих систем нормальных уравнений справедлив коммутативный закон. Это условие, в частности, может быть выполнено, если при помощи планирования эксперимента добиться, чтобы U_v^i совпадали для всех i :

$$U_v^i = U_v^0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

3.2.4.3. *Одно- и двухэтапная самоорганизация.* Модели для систем с переменными коэффициентами можно получить при помощи самоорганизации на основании таблицы наблюдений:

а) полной (одноэтапная самоорганизация);

б) части (двухэтапная самоорганизация).

Одноэтапная самоорганизация. Сначала находят модель оптимальной сложности. В результате выбора опорной функции и применения способа пошагового повышения ее сложности получают нелинейные выражения. Если оптимальная модель окажется линейной, то это значит, что модель с переменными коэффициентами не требуется. Нелинейная модель может быть приближенно заменена моделью с переменными коэффициентами.

Пример 21. Модели для расчета мощности нагревательного элемента. В табл. 15 приведены 30 реализаций мощности y_1 , силы тока u_1 и температуры u_2 нагревательного элемента [35]. Ищется зависимость мощности от силы тока и температуры

$$y = f(u_1, u_2).$$

С помощью комбинаторного алгоритма самоорганизации была получена модель, которая может содержать следующие 15 членов полинома четвертой степени:

$$y = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1^2 + a_4 u_2^2 + a_5 u_1 u_2 + a_6 u_1^3 + a_7 u_2^3 + a_8 u_1^2 u_2 + a_9 u_1 u_2^2 + a_{10} u_1^4 + a_{11} u_2^4 + a_{12} u_1 u_2^3 + a_{13} u_1^3 u_2 + a_{14} u_1^2 u_2^2.$$

С помощью критерия минимума смещения получена модель оптимальной сложности

$$y = u_1^2 + 0,004 u_1^2 u_2 + 0,000002 u_1^2 u_2^2,$$

позволяющая получить, наряду с другими моделями, две модели с переменными коэффициентами:

$$1) y = a_0(u_2) + a_1(u_2) u_1 + a_2(u_2) u_1^2 = 0 + 0 + (1 + 0,004 u_2 + 0,000002 u_2^2) u_1^2$$

$$2) y = a_0(u_1) + a_1(u_1) u_2 + a_2(u_1) u_2^2 = u_1^2 + (0,004 u_1^2) u_2 + (0,000002 u_1^2) u_2^2.$$

15. Данные полного эксперимента для модели $y = f(u_1, u_2)$

№ п/п	y	u_1	u_2	№ п/п	y	u_1	u_2	№ п/п	y	u_1	u_2
1	1,42	1	100	11	9,52	2	300	21	31,50	3	500
2	5,68	2	100	12	21,42	3	300	22	56,00	4	500
3	35,5	5	100	13	38,08	4	300	23	87,50	5	500
4	51,12	6	100	14	59,60	5	300	24	126,00	6	500
5	1,88	1	200	15	11,68	2	400	25	4,12	1	500
6	7,52	2	200	16	26,28	3	400	26	16,48	2	600
7	16,92	3	200	17	46,72	4	400	27	37,08	3	600
8	30,08	4	200	18	73,00	5	400	28	55,92	4	600
9	47,00	5	200	19	3,50	1	500	29	103,00	5	600
10	67,68	6	200	20	14,00	2	500	30	148,32	6	600

С физической точки зрения, первую из них можно словесно интерпретировать следующим образом: мощность пропорциональна квадрату силы тока $y = k u_1^2$, где коэффициент пропорциональности является функцией температуры, т. е.

$$k = 1 + 0,004t + 0,000002t^2.$$

Различие между обеими моделями вызывается способом осуществления эксперимента. Первая модель получается при постоянной температуре, вторая — при постоянной силе тока.

Упомянутый выше подход дает возможность конструировать соответствующие модели.

В качестве примера рассмотрим функцию:

$$y = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1 u_2 + a_4 u_2 u_3.$$

Эта функция может быть реализована двумя способами:

1) В виде модели с одним фактором

$$a) u_2 = u_3 = \text{const}; \quad y = f(u_1) = (a_0 + a_2 u_2 + a_4 u_2 u_3) + (a_1 + a_3 u_3) u_1;$$

$$б) u_1 = u_3 = \text{const}; \quad y = f(u_2) = (a_0 + a_1 u_1 + a_3 u_1 u_3) + (a_2 + a_4 u_3) u_2;$$

$$в) u_1 = u_2 = \text{const}; \quad y = f(u_3) = (a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2) + (a_3 u_1 + a_4 u_2) u_3.$$

2. В виде модели с двумя факторами

$$a) u_1 = \text{const}; \quad y = f(u_2, u_3) = (a_0 + a_1 u_1) + a_2 u_2 + (a_3 u_1 + a_4 u_2 u_3) u_3;$$

$$б) u_2 = \text{const}; \quad y = f(u_1, u_3) = (a_0 + a_2 u_2) + a_1 u_1 + (a_3 u_1 + a_4 u_2 u_3) u_3;$$

$$в) u_3 = \text{const}; \quad y = f(u_1, u_2) = a_0 + (a_1 + a_3 u_3) u_1 + (a_2 + a_4 u_3) u_2.$$

Полученные модели равноценны и выбор той или иной модели должен вытекать из их содержания.

Двухэтапная самоорганизация. В отличие от первого подхода, структура модели принимается известной априори, т. е. перебор структур модели исключается из алгоритмов самоорганизации и рассматривается одна из структур, которая считается приемлемой исходя из имеющихся априорных сведений.

Применение второго подхода часто вызывается практической необходимостью, так как образование всех возможных комбинаций факторов и их степеней, например с помощью комбинаторных алгорит-

мов, уже для 20 обобщенных факторов (полином четвертой степени от четырех переменных) приводит к большим затратам времени. Однако использование первого подхода может явиться теоретическим обоснованием для последующего применения второго подхода, так как бывает достаточно один раз выполнить моделирование данного объекта, пользуясь первым подходом. Для дальнейших исследований можно на основании полученной структуры модели использовать уже второй подход, который отличается простотой планирования эксперимента и ввиду малой размерности лучшими помехоустойчивостью и численными свойствами информационной матрицы.

16. Значения выходной величины y при частных экспериментах *

u_1	u_2					
	100	200	300	400	500	600
1	1,42	1,88	2,38	2,92	3,5	4,12
2	5,68	7,52	9,52	11,68	14	16,48
3	12,78	16,92	21,42	26,28	31,5	37,08
4	22,72	30,08	38,08	46,72	56	65,92
5	35,5	47	59,5	73	87,5	103
6	51,12	67,68	85,68	105,12	126	148,32

* Строки при $u_1 = \text{const}$, столбцы при $u_2 = \text{const}$

Пример 20а.** Модель для расчета мощности нагревательного элемента. Для самоорганизации модели зависимости мощности от силы тока и температуры возможны два случая.

1. *Температура постоянна.* Ищется модель вида

$$y = a_0(u_2) + a_1(u_2)u_1 + a_2(u_2)u_1^2.$$

По реализациям значений u_2 , приведенным в табл. 16, в первом ряду с помощью комбинаторного алгоритма самоорганизации были получены 6 групповых моделей [41]:

$$u_2 = 100; \quad y = 1,42u_1^2;$$

$$u_2 = 200; \quad y = 1,88u_1^2;$$

$$u_2 = 300; \quad y = 2,38u_1^2;$$

$$u_2 = 400; \quad y = 2,86u_1^2;$$

$$u_2 = 500; \quad y = 3,50u_1^2;$$

$$u_2 = 600; \quad y = 4,12u_1^2,$$

где в качестве полного полинома использовался полином четвертой степени. Для шести реализаций коэффициентов $a_2 = 1,42; 1,88; 2,38; 2,86; 3,50; 4,12$ на втором ряду с помощью алгоритма самоорганизации был образован квадратичный полином от u_2 :

$$a_2 = 1 + 0,004u_2 + 0,000002u_2^2.$$

В качестве полной получается модель, уже приведенная ранее.

** Продолжение прим. 20.

2. *Сила тока постоянна.* В соответствии с данными, приведенными в табл. 16 составляются полиномы от u_2 , имеющие вид [41]

$$u_1 = 1; \quad y = 1 + 0,004u_2 + 0,000002u_2^2;$$

$$u_1 = 2; \quad y = 4 + 0,016u_2 + 0,000008u_2^2;$$

$$u_1 = 3; \quad y = 9 + 0,036u_2 + 0,000018u_2^2;$$

$$u_1 = 4; \quad y = 16 + 0,064u_2 + 0,000032u_2^2;$$

$$u_1 = 5; \quad y = 25 + 0,100u_2 + 0,000050u_2^2;$$

$$u_1 = 6; \quad y = 36 + 0,144u_2 + 0,000072u_2^2.$$

Во втором ряду с помощью комбинаторного алгоритма самоорганизации получают три полинома:

$$a_0 = u_1^2; \quad a_1 = 0,004u_1^2; \quad a_2 = 0,000002u_1^2,$$

которые соответствуют ранее найденной полной модели. Очевидно, что число точек таблицы во втором ряду в большинстве случаев мало, поэтому разделение на обучающую и проверочную последовательности становится затруднительным. По этой причине рекомендуется применение усредненных критериев, в данном случае усредненного критерия регулярности (см. разд. 2.4.8)

$$\Delta^m(B) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Delta_i^2(B).$$

Пример 56*. Прогнозирование урожая пшеницы. Общая модель зависимости размера урожая от водохозяйственных факторов и природных условий должна содержать большое число аргументов и сложную структуру. Такого рода модели трудно применять практически, так как они связаны с измерением большого количества факторов. Если же ограничиться частной задачей для небольшого числа факторов, то модели можно получить сравнительно просто. С помощью планирования активных экспериментов можно добиться того, чтобы влияние факторов, не учитываемых в простых частных моделях, становилось пренебрежимо малым, т. е. чтобы эти модели соответствовали средним значениям факторов, не участвующих в модели.

Для получения прогнозирующей модели урожая пшеницы (с небольшим количеством аргументов) в зависимости от порядка смены режимов полива и удобрения использовались 168 точек, соответствующих 15 различным сменам режима удобрения и 3 стратегиям полива в 1969—1972 гг. Для каждого режима полива при этом было получено 56 точек. Рассматривались следующие режимы полива [86, 87].

1. Фотосинтез ограничен факторами, которые не определяются потреблением воды. Потребление воды ограничено имеющимися ресурсами: на урожай почти или совсем не влияет усиленный полив

2. Фотосинтез и потребление воды ограничены запасами воды, величина урожая растет с увеличением потребления воды, орошение весьма эффективно

3. Фотосинтез ограничен факторами, которые не зависят от водоснабжения. Потребление воды не ограничивается влажностью почвы.

Были получены следующие модели (при этом был применен комбинированный критерий селекции, состоящий из критериев минимума смещения и регулярности):

$$y = 18,1 + 1,2u_1 - 0,069u_1^2 + 0,98u_2; \quad (1)$$

$$y = 23,8 + 1,76u_1 - 0,15u_1^2 + 1,12u_2; \quad (2)$$

$$y = 27,0 + 2,24u_1 - 0,115u_1^2 + 1,18u_2, \quad (3)$$

где u_2, u_1 — содержание соответственно азота и фосфора.

* Продолжение прим. 5 и 5а

Для первого уравнения можно было получить лишь приближенную аппроксимацию, так как в этом режиме есть несколько неучтенных факторов, влияние которых уменьшается с ростом потребления воды.

Рост свободного члена и коэффициентов при u_1 и u_2 с улучшением водоснабжения свидетельствует о повышении интенсивности потребления фосфора и азота. Ввиду того что структура всех трех моделей получается одинаковой, коэффициенты полной модели

$$y = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

могут быть представлены в функции содержания влаги в почве и, тем самым, в зависимости от режима полива

$$a_j = b_j + c_j u_3 + d_j u_3^2, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

По имеющимся трем точкам для каждого коэффициента была получена оценка. Окончательная модель имеет такой вид:

$$y = 18,1 + 6,7u_3 - 1,17u_3^2 + (1,13 + 0,62u_3 - 0,84u_3^2) u_1 + (0,065 - 0,05u_3 - 0,011u_3^2) u_2 + (0,96 + 0,17u_3 - 0,032u_3^2) u_3.$$

С помощью модели можно по заданным количествам азотно-фосфорных удобрений и использованной для полива воды прогнозировать урожай.

3.2.4.4. Применение двухэтапной самоорганизации для прогнозирования характеристик проектируемых систем. В этом случае вместо K различных значений факторов u_c имеется K различных физических объектов. Для каждого объекта получено n_i реализаций. Факторы, как и ранее, делятся на вектор u_v факторов, входящих в модель с переменными коэффициентами; вектор u_c постоянных для данного объекта факторов, влияющих на коэффициенты моделей.

После того как с помощью самоорганизации для K объектов было получено K таких моделей с одинаковой структурой

$$y_k = f(u_v^k, a^k),$$

во втором ряду моделируется зависимость коэффициентов модели от определенных типичных свойств объекта, обозначенных через факторы u_c :

$$a = g(u_c, c)$$

В качестве полной модели

$$y = f(u_v, g(u_c, c)) = F(u, c)$$

получаем соответствующую нелинейную модель, которая в определенном диапазоне изменения факторов пригодна для всех объектов, принадлежащих к заданному классу. Если теперь подставить соответствующие значения проектируемой системы, принадлежащей к данному классу объектов, то можно прогнозировать интересующие нас ее свойства.

Пример 21. Прогноз характеристик водохранилища. Рассмотрим прогноз характеристик еще не построенного водохранилища [35]. Реки Украинской ССР находятся в одной и той же географической зоне и можно считать, что их экологические

системы сопоставимы. В результате анализа параметрами для каждой системы оказались время полного обмена воды u_1 , площадь водного зеркала u_2 , объем воды u_3 ; часть площади водохранилища с глубиной менее 1 м u_4 ; площадь мелководий u_5 . Ввиду того что приведенные факторы для заданного объекта не появятся. Если с помощью самоорганизации для водохранилищ Украинской ССР найдены модели объектов (например, для 6 водохранилищ Днепровского каскада), то на втором этапе самоорганизации можно получить зависимость коэффициентов модели от этих постоянных для каждого объекта факторов и найти для всех водохранилищ этой зоны общую модель, которая может служить, например, для определения свойств проектируемого водохранилища для канала Дунай — Днепр [35].

3.3. САМООРГАНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.3.1. МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для динамических систем характерно то, что интересующие исследователей выходные величины не могут быть однозначно определены по реализациям входных величин, как в статических системах. Для них требуется дополнительно указать состояние, в котором находится система. Ввиду того что текущее состояние системы в общем случае определяется факторами ее предыдущего состояния, возникает необходимость включить в моделирование значения входных и выходных величин в момент времени t , а также значения реализаций в предыдущие моменты времени $t-1, t-2, \dots, t-g$, т. е. значения запаздывающих аргументов:

$$y_t^M = f(y_{t-1}, \dots, y_{t-g}, u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-g}),$$

где для простоты принято $h = 1$.

Получаются модели, отображающие соотношения вход-выход в соответствии с функциональным рядом Вольтерра и отображающие

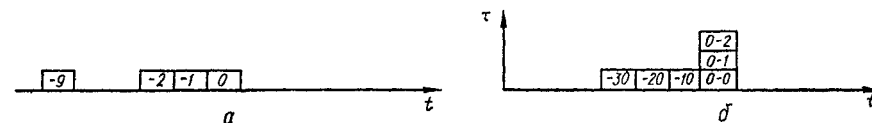


Рис. 3.4. Одномерный (а) и двухмерный (б) шаблоны

состояние в виде систем дифференциальных или разностных уравнений.

Для графической наглядности временных запаздываний при самоорганизации обычно вводят шаблоны. Они представляют собой геометрические фигуры (в случае сосредоточенных параметров — линии и прямые углы), на которых символически показано, какие реализации, наблюдаемые в прошедшие моменты времени $t-k, k = 1, \dots, g$, оказывают влияние на выходные величины в момент времени t (рис. 3.4, а). При этом для вычисления одной точки выходной вели-

чины потребуется $g + 1$ точек или столбцов таблицы наблюдений, а для оценки параметров останется $T - g$ точек.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$d^2y/dt^2 + a_1 dy/dt + a_0 y = f(t).$$

Все наблюдения осуществляются в одной и той же точке пространства и отличаются лишь временным параметром t , поэтому такие модели называются также моделями с сосредоточенными параметрами. Ввиду того что наблюдения следуют дискретно, нужна дискретная модель, которая в простейшем случае с помощью разностей

$$\Delta y = y_t - y_{t-1} \text{ и } \Delta(\Delta y_t) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$$

получается в виде

$$(y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}) + a_1(y_0 - y_{-1}) + a_0 y_0 = f_1(t_0),$$

где для простоты параметр t опущен. Простой шаблон, представляющий влияние аргументов y_{-1} и y_{-2} на выходную величину, имеет вид (рис. 3.4, а)

$$y_0 = f_1(t_0) + f_2(y_{-1}, y_{-2}),$$

где $g = 2$.

Он отражает принцип ближнего действия, т. е. определяет, какие значения, измеренные в недавно прошедшие моменты времени, влияют на значения выходных величин в рассматриваемый момент. Таблица, необходимая для составления системы нормальных уравнений в соответствии с методом наименьших квадратов, должна при этом содержать следующие столбцы:

$$t_0, y_0, y_{-1}, y_{-2}.$$

Для процесса с явной циклическостью целесообразен такой учет этой периодичности, при котором наряду с реализациями $t = 1, t = 2, \dots, t = g$ в модели содержатся реализации $t = \tau, \tau = 1, 2, \dots, g$. Это приводит к моделированию с двухмерным временным вектором t, τ (см. разд. 3.3.4). Соответствующие шаблоны показаны на рис. 3.4, б.

Если $s = 12$ и $h = 1$ мес, то наряду с данными на последние 3 мес для вычисления выходной величины в некоторый момент времени t учитываются данные за предыдущие два года. В отличие от самоорганизации статических моделей самоорганизация моделей динамических систем не содержит никаких принципиальных особенностей, кроме очевидного сокращения имеющихся в нашем распоряжении точек на число запоминаемых g точек и введения соответствующих шаблонов. Если ввести обобщенную переменную v_r , где

$$v_r(t) = u_j(t - k), \quad k = 0, 1, \dots, g; \quad j = 1, \dots, m$$

и

$$v_{m(g+1)+j}(t) = y(t - j), \quad j = 1, \dots, g,$$

то можно воспользоваться алгоритмом самоорганизации, описанным в разд. 3.2.

3.3.2. САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ В ВИДЕ ПОЛИНОМОВ КОЛМОГОВОРА—ГАБОРА

В результате наблюдений получаем выборку с ограниченным числом точек для входных величин $u_{it}, i = 1, \dots, m$ и выходных $y_t, t \in T$. Ищем математическое описание в форме вход-выход, которая в общем виде представляет собой функциональное преобразование $y(t) = F(u(t), t \in T)$. Это соотношение можно представить в виде функционального ряда Вольтерра:

$$y^M(t) = k_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t, s) u(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t, s, s_2) u(s_1) u(s_2) ds_1 ds_2 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_3(t, s_1, s_2, s_3) u(s_1) u(s_2) u(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots$$

Здесь $k_1(t, s)$ представляет собой весовую функцию линейной части, в то время как остальные члены этого ряда отражают нелинейность системы. Если аппроксимировать эту систему системой с конечной памятью и перейти к дискретному описанию, то получим так называемый обобщенный степенной полином, который в кибернетике называется полиномом Колмогорова — Габора и в упрощенном виде записывается как

$$y_t^M = k_0[t] = \sum_{i=1}^{n_1} a_i u_{t-i} + \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_3} a_{ij} u_{t-i} u_{t-j}.$$

Для целей идентификации, как уже упоминалось в разд. 1.2.4, даже при малом n_1 число коэффициентов, которые надо оценить, оказывается слишком большим.

Пример 22. Прогноз рентабельности строительной организации. Обычно при недостаточной априорной информации об объекте приходится произвольно выбирать несколько факторов и эвристически устанавливать структуру модели.

Иногда при этом могут быть полезны известные методы математической статистики. Для эвристически выбранных структур моделей с 2—6 параметрами при аппроксимации, отнесенной к среднему значению m_y , получаем значения $\sigma_m = \sigma/m_y$ в пределах от 2 до 30 %.

С помощью самоорганизации для $g = 0, 1, 2$ и n_A точек обучающей выборки была получена показанная на рис. 3.5 зависимость ошибки аппроксимации $\sigma = f(n_A)$, где

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^M)^2$$

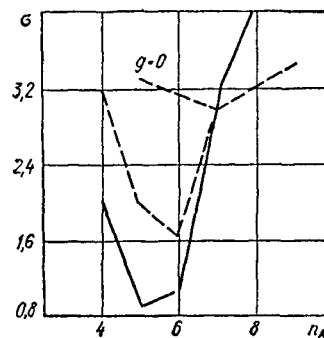


Рис 3.5 Графики зависимости ошибки аппроксимации σ от числа точек обучающей последовательности n_A

— среднеквадратичное отклонение. При $g = 0$ использовались все 5 входных величин, а при $g \neq 0 \dots 9$ величин, наиболее коррелированных с y воздействием, и время t . Для запаздываний $g = 1$ и $g = 2$ получены различные модели. Оптимальной оказалась модель с $g = 1$ и ошибкой аппроксимации $\sigma_m = 0,5\%$. На рис. 3.6 по-казан график зависимости этой ошибки от числа рядов селекции (использовался критерий регулярности), а полученные при этом в разных рядах оценки коэффициентов модели приведены в табл. 17. Начиная с четвертого ряда не наблюдается существенных улучшений точности аппроксимации, поэтому процесс самоорганизации прекращается, начиная с этого ряда.

Полиномиальная модель имеет следующий вид:

$$y = c_0 + c_1 u_{1t-1} + c_2 u_{2t} + c_3 u_{2t-1} + c_4 u_{1t} u_{2t} + c_5 u_{2t} u_{3t} + c_6 u_{2t}^2 + c_7 u_{3t}^2.$$

Пример 23. Прогноз площади посева пшеницы. Рассмотрим расширение площади посева пшеницы $y(t)$ в одной из республик СССР за 14 лет (рис. 3.7, а) [25]. График развития посевных площадей других культур $u_i(t)$, $t = 1, 2, 3, 4$ показан на рис. 3.7, б. Исследуется возможность получения с помощью самоорганизации математического описания зависимости площади посева пшеницы $y(t)$ от площади посева других культур $u_i(t)$. Ввиду ожидаемой сложности этой зависимости было выбрано квадратичное частное описание $f_2(v_i, v_j)$.

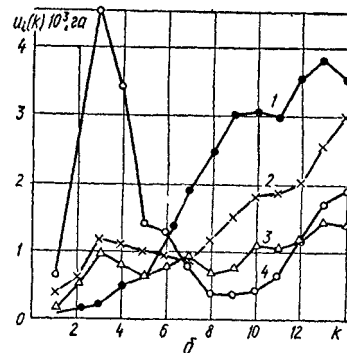
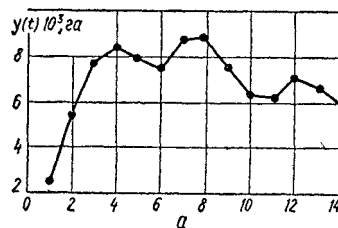
Нормирование по нелинейному тренду. Для переменных

$$u_{ik}; \quad k = 1(1)14; \quad t = 1(1)5; \quad (u_5 = y)$$

были определены кубические функции тренда

$$\varphi_{ik}^3 = a_{0i} + a_{1i}k + a_{2i}k^2 + a_{3i}k^3$$

Рис. 3.7. Графики изменения площади посева пшеницы (а) и других культур 1, 2, 3, 4 (б) по годам k



и осуществлено нормирование. Для максимального временного запаздывания на 5 лет ($g = 5$) было получено 11 существенных для самоорганизации обобщенных факторов. На каждом ряду селекции отбиралось по 6 частных моделей, обучающая последовательность содержала 6 точек. В результате счета после шестого ряда была получена нелинейная модель удовлетворительного качества. Вычисленные по модели оценки значений посевных площадей пшеницы $y(k)$ за исключением моментов времени $t = 9, 10, 14$ практически вообще не отклонялись от статистических значений

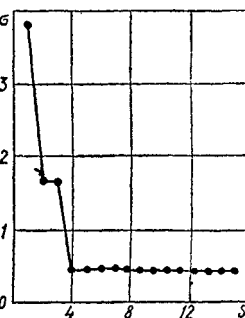


Рис. 3.6. График зависимости ошибки аппроксимации σ от числа рядов селекции S

17. Оценки коэффициентов частных моделей для 15 рядов селекции и соответствующие им значения ошибки

Ряд	c_0	c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	σ^2
1	-7,931	—	—	—	0,00559	—	—	-4×10^{-7}	—	3,6916
2	-73,972	36,5164	—	—	0,000539	—	—	1×10^{-7}	—	1,6581
3	-72,512	35,6758	0,000181	—	0,000528	0,03758	—	1×10^{-7}	—	1,6546
4	-134,936	34,8648	0,008768	—	0,00353	-1,1972	—	—	-1,3089	0,46928
5	-134,766	34,8899	0,008721	—	0,00356	-1,19615	—	2×10^{-7}	-1,30927	0,46926
6	-125,43	36,7148	0,006165	—	0,00573	-1,14026	—	2×10^{-7}	-1,28844	0,48523
7	-124,31	36,6557	0,00594	—	0,00581	-1,11239	—	2×10^{-7}	-1,28266	0,48234
8	-135,37	35,5628	0,008749	—	0,00401	-1,2203	—	2×10^{-7}	-1,29259	0,45585
9	-135,37	35,5633	0,00875	—	0,00401	-1,2205	—	3×10^{-7}	-1,29274	0,45579
10	-135,65	35,5346	0,008821	—	0,003967	-1,2243	—	2×10^{-7}	-1,2938	0,45464
11	-135,08	35,5869	0,008677	—	0,004059	-1,21823	—	3×10^{-7}	-1,2925	0,45487
12	-134,75	35,6058	0,0085996	—	0,004107	-1,21518	—	3×10^{-7}	-1,29159	0,45385
13	-134,76	35,605	0,0086081	—	0,004105	-1,21533	—	3×10^{-7}	-1,29164	0,4539
14	-134,818	35,602	0,0086159	—	0,004097	-1,21582	—	3×10^{-7}	-1,29170	0,45402
15	-134,80	35,6032	0,0086109	—	0,004099	-1,21562	—	3×10^{-7}	-1,29172	0,45402

$(\delta(k) \leq 4 \cdot 10^{-4} \%)$. Относительное отклонение в остальные моменты времени $\delta(9) = 0,5 \%$, $\delta(10) = 5,4 \%$; $\delta(14) = 3,1 \%$

Увеличение числа рядов для этой и других опорных функций не дало существенного эффекта. Очевидно, что получаемая нелинейная модель ввиду сравнительно большого отклонения в конце интервала аппроксимации не пригодна для прогнозирования.

Нормирование по среднему значению. В результате применения эвристической самоорганизации после трех рядов селекции была получена достаточно точная нелинейная модель. Вычисленные с помощью этой модели значения площади посева пшеницы $y_M[k]$ за исключением моментов времени $t = 9, 10, 11$ практически не отклоняются от статистических значений $\delta(k) \leq 10^{-4} \%$. В остальные моменты времени относительные отклонения $\delta(9) = 0,9 \%$; $\delta(10) = 4,4 \%$; $\delta(11) = 8 \%$

Увеличение числа рядов селекции для всех опорных функций не дает существенного улучшения точности. Очевидно, что полученная в третьем ряду модель ввиду более точной аппроксимации в конце рассматриваемого интервала более пригодна для прогноза, чем предыдущая. При прогнозе абсолютного значения посевных площадей пшеницы на 15-й год была получена точность прогноза $0,6 \%$, т. е. вполне достаточная для практики.

3.3.3. САМООРГАНИЗАЦИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для успеха моделирования решающим является выбор опорных функций. Если зависимость вход-выход описать одним или несколькими членами функционального ряда Вольтерра, то получим уравнение, линейное относительно коэффициентов. Определение оценок коэффициентов по экспериментальным данным наблюдений является некорректной (по терминологии А. Н. Тихонова) задачей, так как она имеет многозначное решение и чувствительна к помехам. Согласно теореме Вейерштрасса, на заданные экспериментальные точки можно «натянуть» (т. е. подогнать по методу наименьших квадратов) с одинаковым успехом бесконечное множество достаточно сложных функций. Для регуляризации, т. е. для получения однозначного решения, требуется внешнее дополнение. Одним из наиболее распространенных внешних дополнений является указание уравнения регрессии (вида его опорной функции). Для этого требуется глубоко изучить объект моделирования, что не всегда возможно. В сложных случаях априори указать вид уравнения невозможно. Тогда в качестве внешнего дополнения используется «критерий гладкости» А. Н. Тихонова или ряд практически более целесообразных критериев, разработанных в теории самоорганизации (критерии регулярности, минимума смещения и др.).

Пример 24. Прогноз производства и потребления стального проката. Исходные данные содержали реализации 36 величин на интервале времени с 1960 по 1976 гг., характеризующих развитие производства изделий из стального проката и спрос на них. При этом под стальным прокатом понимается совокупность трех четырехразрядных номенклатур изделий: готовый стальной прокат 12160000, изделия второй степени переработки 12170000 и трубы 12180000. Данные по производству стального проката охватывают производство только в таких отраслях промышленности, как металлургическая, горнорудная и калийная.

Для нормирования переменных отклонения от средних значений делились на среднеквадратичное отклонение. Максимальное запаздывание аргументов составляло

3 года. В результате применения алгоритма МГУА линейные модели оказались более пригодными для прогноза, чем нелинейные (с квадратичными членами), в то время как при помощи нелинейных моделей можно получить лучшую аппроксимацию на интервале интерполяции. Объясняется это тем, что нелинейные модели требуют точного задания важнейших возмущающих воздействий. На интервале прогноза внешние воздействия задаются на основании вспомогательных прогнозов, т. е. неточно. Чем больше заблаговременность прогноза, тем больше преимущество линейных моделей.

В моделях участвуют следующие переменные:

валовое производство в выбранных областях промышленности;
общая потребность в стальном прокате для выбранных отраслей промышленности;
фонд основных средств производства всего народного хозяйства и черной металлургии;
национальный доход;
капиталовложения всего народного хозяйства и черной металлургии;
шифр используемого стального проката в выбранных отраслях промышленности. Приведем примеры некоторых моделей.

$$y_{2t} = 0,0586y_{t-1} + 0,0974y_{t-2} + 0,1344y_{t-3} + 0,0012u_{1t} + 0,0261u_{1t-1} - \\ - 1,1374u_{2t-3} + 2,1521u_{3t} - 0,2861u_{3t-3} + 0,0632u_{4t} - 0,0754u_{4t-2} - 0,0067u_{5t-1} + \\ + 0,1289u_{6t-3} - 0,5669u_{7t-1},$$

где 1 — национальный доход; 2 — индекс валового производства машиностроения и автомобилестроения; 3 — индекс валового производства электротехники и приборостроения; 4 — фонды основных средств черной металлургии; 5 — общественный валовой продукт; 6 — индекс валовой продукции химии; 7 — индекс валовой продукции промышленности строительных материалов.

Спрос

$$y_{1t} = 0,0027u_{1t} + 0,0001u_{1t} + 1,9361u_{2t} + 0,551u_{3t} - 0,1688u_{4t-1} + 1,2784u_{4t-2} + \\ + 0,3058u_{5t-2} + 0,087u_{6t-3},$$

где 1 — фонд основных средств народного хозяйства; 2 — потребность тяжелого машиностроения; 3 — потребность строительства; 4 — валовая продукция машиностроения и автомобилестроения; 5 — шифр использования материала для стального проката в металлургической и металлообрабатывающей промышленности; 6 — индекс валового производства промышленности строительных материалов.

Прогноз развития производства. На рис. 3.8, а показаны графики развития производства. Кривая 2 — это прогноз развития производства, полученный по модели. Для сравнения на этом рисунке изображена кривая 3 — это фактическое развитие производства за 1977—1980 гг. Кроме того, было определено развитие производства при условии выделения линейного (кривая 4) или квадратичного (кривая 1) тренда. Эти результаты подтверждают приведенные выше высказывания о свойствах линейных и квадратичных моделей.

Прогноз развития спроса. На рис. 3.8, б показаны графики развития спроса. Кривая 2 — это прогноз развития спроса, полученный при помощи моделирования. Для сравнения представлен прогноз спроса, полученный с помощью опроса экспертов (кривая 3). Для ориентации также приводятся прогнозы, полученные при выделении линейного (кривая 4) и квадратичного (кривая 1) трендов.

Пример 25. Прогноз производительности прокатного стана 300. Для прогноза производительности прокатного стана 300 были использованы данные об изменении 11 переменных в 1960—1976 гг. С помощью этих реализаций удалось получить модели производительности при использовании различных критериев и способов разделения таблицы данных.

Существенными оказались следующие величины: продукция u_1 ; производительность u_2 ; перерывы в работе u_3 ; потребление электроэнергии u_4 , а также в некоторых случаях сортамент продукции.

В качестве максимального запаздывания допускалось запаздывание в 4 года. Прогнозирующая модель имеет следующий вид:

$$y_t^M = -1,171 - 0,0873y_{t-1} + 0,005y_{t-2} - 0,01525y_{t-3} - 0,00054y_{t-4} + \\ + 0,00015u_{1t} + 0,0000u_{1t-1} + 0,0000u_{1t-3} + 0,00148u_{2t} - 0,00435u_{2t-3} + \\ + 0,1757u_{3t-1} - 0,034u_{4t-4}.$$

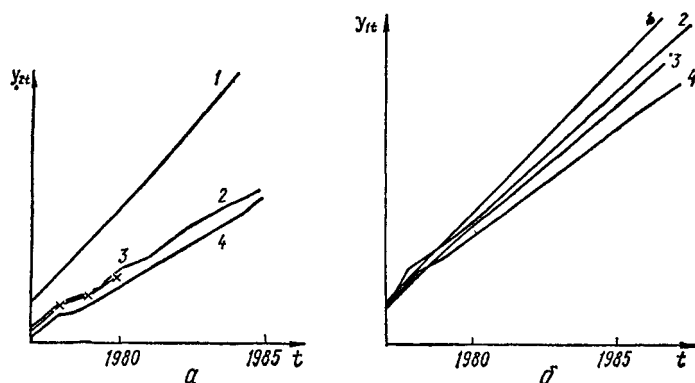


Рис. 3.8. Графики развития производства (а) и спроса (б)

При среднеквадратичном отклонении $\sigma = 0,2819$ выход модели отклоняется от фактических реализаций не более чем на 2,5 %. Для последующих лет при сохранении темпов развития производства при прежних структуре сортамента, потреблении электроэнергии и производительности труда, а также при дальнейшем уменьшении перерывов в работе были получены прогнозы, приведенные в табл. 18.

18. Прогнозы производительности прокатного стана 300

Год	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Производительность, т/ч	40,8	42,7	42,8	43	43,7	44,5

Пример 15а*. Прогноз роста валовой продукции предприятия. Первый метод состоит в том что в качестве возможных выходных величин динамической модели рассматривались 18 переменных. Модели были получены для каждой из этих переменных при различных критериях селекции и способах разделения таблицы исходных данных на части. Две последние имеющиеся в распоряжении точки интервала времени наблюдения процесса (с 1950 по 1973 гг.) были выделены в отдельную экзотическую выборку для вычисления $\Delta^2(C)$.

Полученные при этом структуры моделей, а также нормированные по средним значениям среднеквадратичные ошибки аппроксимации σ_i/m_i приведены в табл.19.

* Продолжение прим 15

19. Модели и ошибка

x_{1t}				x_{2t}				x_{9t}				x_{10t}				x_{11t}				x_{15t}		
-1	-2	-3	-4	-1	-1	-3	-4	-1	-2	-3	-4	-1	-2	-3	-4	-1	-2	-3	-4	-1	-2	-3
	×			×				×				×				×		×			×	
×	×			×				×		×	×	×	×	×	×	×	×	×		×		
×	×					×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
×	×					×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
×	×					×	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
×		×	×	×												×	×					×
								×													×	

В качестве воздействий, которые не могут быть выражены при помощи 18 наблюдаемых величин, выступали переменные u_{3t} , u_{5t} , u_{7t} , u_{12t} и u_{17t} , отражающие влияние научно-технического прогресса. Полученные модели дают возможность выполнить нормативные прогнозы выходных величин при задании определенных значений внешних воздействий на период прогноза.

Другой метод состоит в том, что для внешних (экзогенных) воздействий, как для переменных состояния, формально находятся разностные модели. Такие модели аппроксимируют изменение внешних воздействий по данным интервала наблюдения процесса. В результате получается определенная (замкнутая или автономная) система разностных уравнений, в которой число переменных равно числу знаков равенства. Пошаговое интегрирование системы дает краткосрочный прогноз на 2—3 шага вперед при условии сохранения тенденций развития системы на ближайшее будущее (модель статус-кво).

Формальный подход к аппроксимации изменения внешних воздействий при помощи разностных уравнений обоснован, как и применение неявных шаблонов, учитывающих будущее значение переменных.

Пример 26. Прогноз некоторых показателей народного хозяйства ГДР. В основу построения модели, которая делает возможным прогноз развития народного хозяйства ГДР, были положены данные о среднегодовых народнохозяйственных показателях за 1955—1980 гг., опубликованные в Статистическом ежегоднике ГДР. Учитывались следующие показатели: работающие в непродовольственных отраслях, 10^3 , x_1 ; основные фонды в производственных отраслях x_2 , млн. марок; основные фонды в непродовольственных отраслях x_3 , млн. марок; капиталовложения в производительные отрасли x_4 , млн. марок (базис — 1975 г.); капиталовложения без учета капиталовложений в производительные отрасли x_5 , млн. марок (базис — 1975 г.); общественное потребление x_6 , млн. марок (базис — 1975 г.); вырабатываемый национальный доход x_7 , млн. марок (базис — 1975 г.); сбережения населения x_8 , млн. марок; общественный валовой продукт x_9 , млн. марок (базис — 1975 г.); суммарное население x_{10} ; население работоспособного возраста x_{11} ; работающие в производственных отраслях, 10^3 , x_{12} ; личное потребление x_{13} , млн. марок (базис — 1975 г.); реальный доход в бюджете рабочих и служащих x_{14} , % (1960 г. принят за 100 %); средний месячный заработок рабочих и служащих с полным рабочим днем в социалистическом хозяйстве x_{15} , марок; суммарный объем внешней торговли x_{16} , 10^6 марок; накопления x_{17} , млн. марок (базис — 1975 г.).

их аппроксимации

x_{1t}				u_3				u_{5t}		u_{7t}			u_{12t}	u_{17t}		σ_t/m , %
-1	-2	-3	-4	-1	-2	-3	-4	-2	-3	-1	-2	-3	-3	-1	-2	
			×												×	9,0
×				×	×									×	×	4,3
×														×		1,6
×		×					×		×				×			1,4
		×														6,6
				×	×	×								×		4,8
×	×	×			×	×		×	×	×	×	×				6,7

Построена модель в виде следующей системы линейных уравнений:

$$x_{it} = c_i + \sum_{k=0}^4 \sum_{j=1}^{17} b_{kj}^i x_{kt-j}, \quad i = 1(1)17,$$

где $b_{i0}^i = 0$.

Предварительно из 84 переменных по коэффициенту корреляции было отобрано 30 наиболее существенных, для которых в каждом ряду многоградного алгоритма МГУА строилось 435 частных моделей. При этом применялись критерии регулярности и два вида критерия минимума смещения [при одновременном варьировании правила разделения таблицы данных (см. разд. 2.5.2)]. В результате для каждой выходной переменной выбиралась модель с наилучшей среднеквадратичной аппроксимацией (табл. 20). В табл. 20 приведены нормированные по среднему значению m_{x_i} и среднеквадратичному отклонению σ_{x_i} значения среднеквадратичной ошибки аппроксимации $\sigma_1 = \sigma_t/m_{x_i}$ и $\sigma_2 = \sigma_t/\sigma_{x_i}$. Аппроксимация оказалась хорошей даже для показателей x_{1t} , x_{4t} , x_{5t} , x_{10t} , x_{11t} , x_{12t} , x_{17t} , которые, с теоретической точки зрения, едва ли можно причинно объяснить заложенными в модель переменными.

20. Оптимальные модели показателей народного хозяйства ГДР и их точность

№ модели	Модель	σ_1 , %	σ_2 , %
1	$x_{1t} = 774,3 + 0,01x_{7t-1} - 0,0024x_{9t-1} + 1,025x_{14t} + 0,00001x_{16t}$	0,67	5,8
2	$x_{2t} = -33042,4 + 0,627x_{2t-1} + 0,511x_{7t-1} - 0,723x_{13t-2} + 65,5x_{15t-4}$	0,32	0,81

Продолжение табл. 20

№ модели	Модель	σ_1 , %	σ_2 , %
3	$x_{3t} = 144621,6 + 0,394x_{8t} + 0,144x_{8t-2} + 0,107x_{9t-4} - 2,15x_{15t}$	0,12	0,92
4	$x_{4t} = 17252,7 + 0,072x_{2t-4} + 0,076x_{3t-1} - 0,324x_{3t-3} + 0,144x_{3t-4} + 0,583x_{4t-1} - 0,085x_{7t-1} + 0,263x_{8t} - 0,014x_{9t-4} - 0,215x_{17t-1}$	1,8	3,6
5	$x_{5t} = -2137,9 - 0,025x_{2t} + 0,547x_{5t-1} + 0,1x_{7t} + 0,012x_{7t-2}$	5,0	9,3
6	$x_{6t} = -8473,1 - 0,159x_{6t-2} - 0,188x_{6t-4} + 0,189x_{13t} + 60,56x_{14t-2}$	1,0	2,1
7	$x_{7t} = 26710,5 - 0,185x_{2t-2} - 0,0158x_{2t-3} - 0,04x_{7t-3} + 0,55x_{9t} - 22,03x_{15t}$	0,32	0,88
8	$x_{8t} = -110750,4 - 0,037x_{3t-1} + 0,673x_{3t-3} + 0,897x_{4t} + 0,272x_{7t} - 0,154x_{8t-3}$	0,78	1,18
9	$x_{9t} = -38935 + 0,048x_{2t} + 0,194x_{2t-4} + 0,067x_{3t-4} + 1,676x_{7t} + 0,459x_{8t} + 0,064x_{8t-3} + 0,17x_{13t-1} + 8,2x_{15t-3} + 29,44x_{15t-4}$	0,19	0,46
10	$x_{10t} = 1,783 \cdot 10^7 + 2,17x_{2t} + 48,07x_{4t} - 10,41x_{4t-1} - 2,18x_{8t} - 9,36x_{8t-1} + 0,984x_{9t-1} + 10,37x_{13t} - 40,15x_{13t-1}$	0,27	17,4
11	$x_{11t} = -2,053 \cdot 10^5 + 18,84x_{2t-4} + 9,87x_{3t-2} + 1,528x_{4t-2} - 22,3x_{9t-4} + 0,876x_{11t-2} + 3464,9x_{15t-4} - 10,0x_{17t-4}$	0,72	16,4
12	$x_{12t} = 5522,2 - 0,00016x_{2t-2} + 0,0013x_{2t-3} - 7,4 \cdot 10^{-6}x_{2t-4} - 0,0003x_{3t-3} - 0,0034x_{3t-4} + 0,0002x_{11t-1} - 4 \cdot 10^{-5}x_{11t-2}$	0,21	22,4

Продолжение табл. 20

№ модели	Модель	$\sigma_1, \%$	$\sigma_2, \%$
13	$x_{13t} = 17,600 + 0,016x_{2t} + 2,9x_{6t} + 0,031x_{7t-2} + 0,044x_{13t-1} + 23,13x_{15t-3}$	0,5	1,5
14	$x_{14t} = -2,38 + 1,5 \cdot 10^{-5}x_{7t} + 3,43x_{7t-1} + 2,56x_{7t-3} - 1,07 \cdot 10^{-5}x_{9t} - 2,1 \cdot 10^{-4}x_{13t-4} + 0,81x_{14t-1} - 10^{-5}x_{16t}$	0,08	2,56
15	$x_{15t} = 449,6 + 0,0015x_{8t-2} + 0,0046x_{8t-3} + 0,357x_{15t-1} - 0,095x_{15t-2} - 0,215x_{15t-3} + 0,00003x_{17t-1}$	0,54	2,1
16	$x_{16t} = -211269 - 0,18x_{2t-4} - 0,927x_{3t-4} - 3,77x_{13t-4} - 206,3x_{14t} + 11001x_{14t-1} + 1,136x_{16t-3} + 0,34x_{16t-4}$	3,4	4,6
17	$x_{17t} = -3011,7 + 0,042x_{3t-2} + 0,106x_{4t} + 0,526x_{4t-1} + 0,219x_{17t-3}$	2,3	5,0

21. Структура системы уравнений модели народного хозяйства ГДР

Показатель	Входной фактор												
	x_2	x_3	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_4	x_5	x_{17}
x_2	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-
x_3	-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	-
x_6	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-
x_7	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
x_8	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
x_9	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-
x_{13}	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-
x_{14}	-	-	-	+	-	+	+	+	-	+	-	-	-
x_{15}	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+
x_{16}	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-	-	-

Продолжение табл. 21

Показатель	Входной фактор												
	x_2	x_3	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_4	x_5	x_{17}
x_1	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-
x_4	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-	+
x_5	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-
x_{17}	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	+

Примечание. Знак «+» обозначает присутствие данного фактора в множестве аргументов модели.

Структура полученной системы уравнений наглядно отражена в табл. 21. При этом критерий для системы, состоящей из 14 уравнений, без учета уравнений для показателей x_{10t} , x_{11t} , x_{12t} достигает самого минимального значения $k = 0,0938$. Полученная модель, состоящая из 14 уравнений, автономна, т. е. не содержит внешних воздействий. Ее можно использовать для пошагового краткосрочного прогноза.

Наряду с автономной системой уравнений, при которой внешние воздействия отсутствуют, рассматривалась неавтономная система, где в качестве внешних

22. Сравнение точности прогнозов переменных, полученных при помощи экстраполяции и самоорганизации

Переменная	Экстраполяция	Самоорганизация	Переменная	Экстраполяция	Самоорганизация	Переменная	Экстраполяция	Самоорганизация
x_1	6,2	9,1	x_7	1299	331	x_{12}	18,1	13,5
x_2	1160,0	864	x_8	583	356	x_{13}	1014	365
x_3	443	228	x_9	2360	499	x_{14}	1,63	1,05
x_4	750	401	x_{10}	49 282	46 455	x_{15}	6,7	3,82
x_5	377	300	x_{11}	44 333	74 157	x_{16}	18 499	14 956
x_6	294	101				x_{17}	943	503

23. Прогнозы переменных с учетом условий реализуемости

Год	x_2	x_3	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{13}	$x_{14}, \%$	x_{15}, M	x_{16}
1981	510,0	237,4	19,4	180,6	103,5	474,5	124,0	230,9	1057,5	1,299
1982	536,8	241,3	19,7	188,2	107,1	491,9	130,2	238,5	1084,4	1,402
1983	564,3	245,4	20,2	195,7	111,0	509,0	136,4	246,5	1106,6	1,503
1984	592,5	249,5	20,4	203,1	114,7	526,1	142,4	254,1	1129,1	1,605
1985	621,7	253,6	20,7	210,8	118,0	543,0	148,6	262,2	1151,0	1,707
1986	651,7	257,5	20,9	219,3	121,1	560,2	154,4	270,5	1172,7	1,814
1987	682,4	261,4	21,1	227,3	123,7	578,2	160,4	279,2	1193,6	1,925
1988	713,8	265,2	21,2	236,9	126,3	600,2	166,6	288,8	1213,7	2,034
1989	746,1	268,9	21,4	247,9	128,7	621,0	173,2	299,2	1233,3	2,159
1990	770,4	272,5	21,5	261,4	131,0	648,7	179,9	311,5	1252,5	2,287

воздействий использовались различные показатели, выбираемые из теоретических соображений (табл. 22). Были получены прогнозы для нескольких показателей на 1981—1990 гг. на основе цен 1975 г. Для этих показателей заметно расхождение прогнозов по значению, позволяющее сделать соответствующее заключение об увеличении неопределенности при увеличении интервала прогнозирования.

Прогнозы, определенные для отдельных показателей с учетом условий реализуемости, приведены в табл. 23. Для сравнения в табл. 24 приведена полученная точность прогноза. Из плановых значений развития народного хозяйства в ГДР на

24. Оценка точности прогнозов, полученных при помощи самоорганизации

Год	Индекс переменной																
	1	2	3	4	6	7	8	10	12	13	14	15	16	17			
1981	0,3	0,1	0,6	0,5	0,5	1,1	0,6	0,03	0,2	1,6	0,6	1,1	0,6	7,1			
1982	0,2	0,1	0,9	6,4	6,1	0,5	0,5	0,1	0,5	3,8	0,05	1,7	3,4	4,2			

1981—1985 гг. для национального дохода x_7 и для общего валового продукта x видно, какие высокие требования заложены в этом плане к производительности народного хозяйства, к его планированию. Следовательно, требуются дополнительные мероприятия для повышения эффективности, роста производительности труда, экономии материалов и т. д. по сравнению с прежним уровнем.

Конечно, нельзя переоценивать значение самоорганизации прогнозов, особенно при одноуровневых алгоритмах МГУА. Развитие экономических систем в значительной мере зависит от социальных целей общества и от стратегии хозяйства, устанавливаемой при помощи планирования на отдаленную перспективу. Прогнозы, получаемые из известных данных, показывают на коротких периодах времени, как может протекать дальнейший ход процесса, если

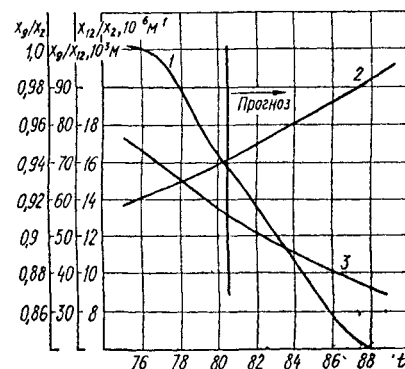
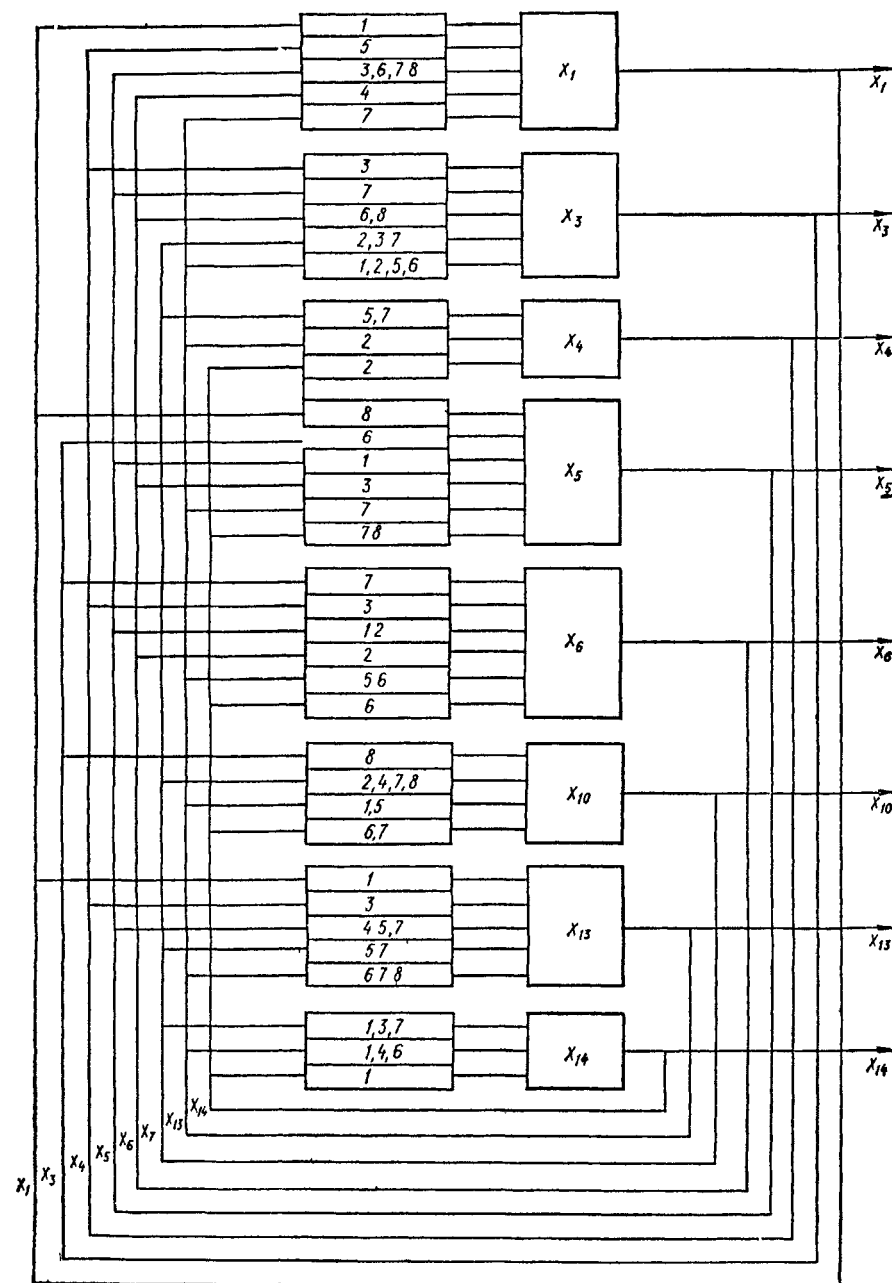


Рис. 3.9. Кривые изменения показателей народного хозяйства ГДР и прогноза:

1 — доля капиталовложений x_9/x_2 ; 2 — валовая продукция x_9/x_{12} , тыс. марок на единицу рабочей силы; 3 — рабочая сила на единицу основных капиталовложений x_{12}/x_2

будет сохранена существующая до настоящего времени стратегия. Такая информация используется в качестве основы для анализа эффективности народнохозяйственного процесса воспроизводства и для краткосрочного прогноза развития хозяйства.

Поясним эту мысль рассмотрением следующих показателей, которые были получены для 1975—1980 гг. по данным фактического развития, а для 1981—1990 гг. — по данным прогнозируемых показателей (табл. 23) при допущении постоянства рабочей силы в производственной отрасли $x_{12} = 6,6$ млн. чел. (рис. 3.9). Ввиду того что данные по основным средствам производства основаны на ценах



а

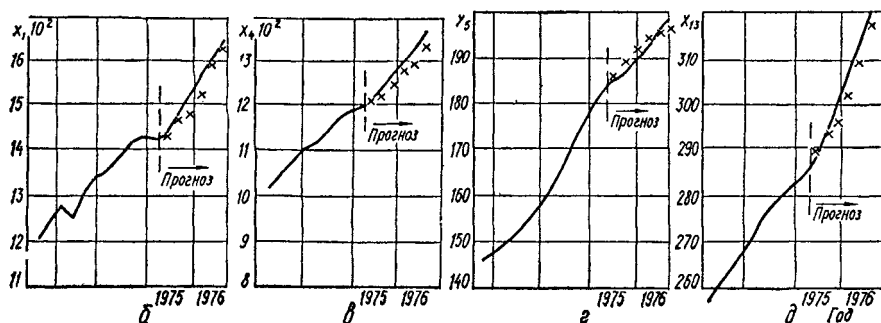


Рис. 3.10. Структура модели экономики США (а) и краткосрочные прогнозы экономических показателей США (по данным до 1975 г.) (б, в, г, д)

1966 г., полученные рекомендации следует понимать лишь как тенденции.

Из прогнозируемого развития этих показателей (например, падающей фондоотдачи x_9/x_2) видно, что полученная модель отражает тенденцию последних лет, а не желательную стратегию развития народного хозяйства. Для достижения целей, поставленных директивами на пятилетку 1981—1985 гг., нужно направить усилия на то, чтобы задержать тенденцию падения фондоотдачи. Расход рабочей силы на единицу основных фондов x_{12}/x_2 при значительном повышении производительности труда (например, при помощи наблюдающегося с начала 80-х годов усиленного применения микроэлектроники и промышленных роботов) должен быть снижен, а продукция на единицу рабочей силы x_9/x_{12} должна быть соответственно повышена.

Пример 27. Прогноз характеристик экономики США [49]. Основой для построения модели, показывающей экономические процессы в народном хозяйстве экономики США, являются 42 реализации (данные с IV квартала 1964 г. по I квартал 1975 г.) 21-го показателя экономики США. Ищется модель вида

$$x_{it} = a_0^i + \sum_{j=1}^8 \left(a_{jt}^i - \sum_{k=1}^{21} b_k x_{kt-j}^i \right), \quad i = 1, \dots, 21.$$

Для каждого из показателей в первом ряду многорядного алгоритма МГУА было построено 780 частных линейных моделей, из которых по критерию минимума смещения отбиралось по 30 моделей (свобода выбора $F_1 = 30$).

Селекция частных моделей продолжалась до тех пор, пока не был достигнут минимум указанного критерия. Из полученных на первом этапе структур моделей на втором этапе были получены модели для 8 показателей: первоначальный продукт x_{1t} ; национальный доход x_{3t} ; личный доход x_{4t} ; дефляция цен национального продукта x_{5t} ; дефляция цен частная x_{6t} ; заработная плата x_{10t} , чел.·ч; выпуск денег по группе М1 x_{13t} ; выпуск денег по группе М2 (рис. 3.10, а).

Система уравнений (табл. 25) оказалась автономной, поэтому она применима для пошагового краткосрочного прогноза. Точность прогноза на II, III, IV кварталы

25. Модели для показателей экономики США

№ уравнения	Модель
1	$x_{1t} = -114,86 + 0,894x_{1t-1} + 0,05625x_{4t-5} - 2,3476x_{5t-3} + 23,587x_{5t-6} - 18,275x_{5t-7} + 5,467x_{5t-8} - 5,217x_{6t-4} - 0,8283x_{13t-7}$
2	$x_{3t} = -451,37 + 0,2563x_{1t-1} - 1,3502x_{5t-7} - 3,231x_{6t-6} + 8,1061x_{6t-8} - 140,92x_{10t-2} - 236,96x_{10t-3} + 87,045x_{10t-7} + 3,5427x_{13t-1} + 2,8526x_{13t-9} + 1,2499x_{13t-5} + 1,1724x_{13t-6}$
3	$x_{4t} = -238,64 - 84,163x_{10t-5} + 82,507x_{10t-7} + 3,7134x_{13t-2} + 0,6916x_{14t-2}$
4	$x_{5t} = 11,895 + 1,088x_{5t-1} - 0,00551x_{1t-8} + 0,0293x_{3t-6} - 0,2725x_{6t-3} - 0,086x_{13t-7} + 0,03914x_{14t-7} - 0,00515x_{14t-8}$
5	$x_{6t} = 5,585 + 0,1306x_{6t-2} - 0,01343x_{3t-7} - 0,00243x_{4t-3} + 1,2604x_{5t-1} - 0,2224x_{5t-2} - 0,04754x_{13t-5} - 0,2118x_{13t-6} + 0,0876x_{14t-6}$
6	$x_{10t} = 0,19596 + 0,6092x_{10t-2} + 0,3788x_{10t-4} + 0,1746x_{10t-7} - 0,34245x_{10t-8} - 0,00001x_{3t-8} + 0,000145x_{13t-1} - 0,00242x_{13t-5} - 0,000319x_{14t-6} + 0,003319x_{14t-7}$
7	$x_{13t} = 67,893 + 0,0645x_{2t-1} + 0,0465x_{4t-3} - 1,0195x_{5t-4} + 1,1876x_{5t-6} - 0,6898x_{5t-7} + 35,405x_{10t-5} + 19,755x_{10t-7} - 0,4934x_{13t-6} + 0,18827x_{13t-7} - 0,15198x_{13t-8}$
8	$x_{14t} = 4,3623 + 1,0298x_{14t-1} - 18,541x_{10t-1} + 15,657x_{10t-3} + 45,187x_{10t-7} - 0,4316x_{13t-1} - 0,4448x_{13t-4} + 0,1071x_{13t-6}$

26. Данные для оценки точности прогноза

Переменная	1975 г			1976 г			Оценка ошибки, %	
	II	III	IV	I	II	III	δ_1	δ_2
x_1	$\frac{1436,1}{1430,3}$	$\frac{1474,4}{1465,5}$	$\frac{1520,9}{1475,1}$	$\frac{1562,8}{1520,4}$	$\frac{1604,6}{1586,9}$	$\frac{1645,5}{1627,1}$	1,99	2,31
x_9	$\frac{1162,7}{1136,6}$	$\frac{1198,1}{1142,0}$	$\frac{1237,7}{1152,1}$	$\frac{1271,9}{1163,9}$	$\frac{1307,3}{1166,9}$	$\frac{1341,6}{1199,2}$	6,87	11,44

Продолжение табл. 26

Переменная	1975 г.			1976 г.			Оценка ошибки, %	
	II	III	IV	I	II	III	δ_1	δ_2
x_4	$\frac{1206,3}{1209,5}$	$\frac{1235,2}{1220,1}$	$\frac{1267,1}{1242,9}$	$\frac{1295,0}{1273,5}$	$\frac{1328,9}{1294,4}$	$\frac{1369,2}{1332,9}$	1,76	2,80
x_5	$\frac{184,8}{185,9}$	$\frac{186,9}{189,4}$	$\frac{190,2}{192,4}$	$\frac{193,3}{194,9}$	$\frac{196,2}{196,5}$	$\frac{199}{196,9}$	1,46	1,23
x_6	$\frac{177,6}{179,6}$	$\frac{179,7}{184,4}$	$\frac{182,5}{188,2}$	$\frac{185,7}{191,8}$	$\frac{188,7}{194,7}$	$\frac{191,4}{196,7}$	3,19	3,82
x_{10}	$\frac{5,87}{5,89}$	$\frac{5,98}{6,02}$	$\frac{6,05}{6,17}$	$\frac{6,22}{6,31}$	$\frac{6,35}{6,44}$	$\frac{6,47}{6,58}$	1,15	1,74
x_{13}	$\frac{288,2}{288,8}$	$\frac{294,7}{293,7}$	$\frac{301,5}{285,9}$	$\frac{308,7}{302,4}$	$\frac{315,8}{309,6}$	$\frac{323,5}{318,4}$	1,12	1,92
x_{14}	$\frac{634,7}{635,8}$	$\frac{651,2}{651,7}$	$\frac{667,5}{669,4}$	$\frac{683,6}{691,8}$	$\frac{698,9}{715,8}$	$\frac{715,1}{739,7}$	0,28	2,09

Примечание. В числителе дано фактическое значение, в знаменателе — прогноз.

1975 г. и I, II, III — 1976 г. можно оценить по табл. 26 и рис. 3.10, б, в, г, д. При этом качество прогноза определялось по следующему показателю:

$$\delta_k = \frac{1}{m_x} \sum_{t=1}^{3k} |x_{42+t} - x_{42+t}^M|.$$

Пример 28. Прогноз некоторых показателей народного хозяйства Народной Республики Болгарии. По реализациям пяти показателей (национальный доход x_1 , фонды потребления x_2 , основные фонды x_3 , рабочая сила в материальном производстве x_4 и капиталовложения в отрасли материального производства x_5 , данные об изменении которых имелись за 1961—1975 гг. [56]) с помощью алгоритма самоорганизации, использующего критерий минимума смещения, была найдена следующая система разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_{1t} &= 0,172x_{1t-3} + 0,52x_{3t-1} + 0,27x_{3t-2} + 0,945x_{5t-1} + 2,171x_{2t-1} + 0,923x_{2t-2}; \\ x_{2t} &= 0,503x_{2t-1} + 0,13x_{2t-2} + 0,184x_{2t-3} + 0,195x_{1t-2}; \\ x_{3t} &= -0,26x_{3t-2} + 0,847x_{3t-3} + 2,637x_{2t-1} - 0,706x_{2t-2}; \\ x_{4t} &= 0,922x_{4t-1} + 6,122x_{2t-1} - 61,79x_{5t-1} + 0,525x_{5t-2} + 17,77x_{5t-3}; \\ x_{5t} &= 0,308x_{1t-1} + 0,727x_{1t-2} + 0,913x_{1t-3} + 0,279x_{3t-1} + 1,273x_{3t-2} + \\ &\quad + 0,594x_{3t-3} - 0,464x_{2t-1} + 0,703x_{2t-2}. \end{aligned}$$

Для национального дохода x_{1t} , фондов потребления x_{2t} и основных фондов x_{3t} были вычислены прогнозы на 1976—1979 гг. и сравнены с фактическими значениями. В табл. 27 приведено отклонение вычисленных прогнозов от фактических данных. Видно, что прогнозы имеют достаточную точность.

27. Отклонение прогнозов от фактических данных, %

Величина	1976 г	1977 г	1978 г	1979 г	1980 г
$ \Delta x_1/x_1 $	4,9	5,1	12,1	7,9	3,2
$ \Delta x_2/x_2 $	3,1	6,1	3,5	2	0,9
$ \Delta x_3/x_3 $	0,8	2,8	5	6,2	0,7

терию прогноза $\Delta^2(C) < 1$, для трех сезонных периодов (трех кварталов) Лучшей оказалась модель

$$\begin{aligned} x_{1t+1} &= 16406,95 - 7,3036x_{4t-1} - 284,8073x_{4t-2} - 1626,202x_{4t-3} - 7,5805u_{1t} + \\ &\quad + 189,39u_{1t-3} - 1,16u_{3t-3} + 0,361u_{4t} - 0,3597u_{5t-2} - 0,38u_{5t-3} - \\ &\quad - 27,78u_{6t} - 302,9u_{6t-2}; \\ x_{4t-1} &= 6,7477 - 0,0056x_{6t-2} + 0,077x_{6t-3} + 0,0061u_{1t} + 0,0009u_{1t-3} - \\ &\quad - 0,0015u_{2t-3} + 0,0029u_{4t-1} - 0,0083u_{6t-3}; \\ x_{6t+1} &= -135,518 + 0,3838x_{6t} - 0,3196u_{1t-1} + 0,1991u_{1t-2} + 0,2327u_{1t-3} + \\ &\quad + 0,5498u_{2t-2} + 1,031u_{3t-1} + 1,304u_{3t-3} + 0,0549u_{4t-2} + 0,0002u_{5t-1} - \\ &\quad - 1,385u_{6t-1} - 0,7456u_{6t-2}. \end{aligned}$$

Эта модель может быть использована для краткосрочного прогноза. Из модели очевидно, что множество параметров состояния включает в себя биомассу фитопланктона x_{1t} , содержание щелочей x_{4t} и цветность x_{6t} , которые зависят от воздействий температуры воды u_1 , солнечного облучения u_2 , скорости течения воды u_3 , уровня u_4 , водостока u_5 , содержания нитратов u_6 . Полученная структура модели использована для прогноза (разд. 4.5.2).

3.3.4. САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Если необходимо прогнозировать процессы, обладающие циклическим характером, при гармоническом анализе которых оказывается, что амплитуда одной из гармоник существенно больше, чем всех остальных, т. е. имеет место сезонное колебание с периодом τ (квартал, месяц, год), то целесообразно применять двухмерный отсчет времени t, τ (см. рис. 3.4, б). Каждую наблюдаемую величину целесообразно расположить в таблице с абсциссой t и ординатой τ . В дальнейшем соответствующие наблюдения $y_{t-k, -\tau}$, $u_{t-k, -\tau}$ задерживаются по отношению к текущему моменту времени t на k временных интервалов и τ периодов сезонных колебаний.

Искомая модель для выходных величин имеет при этом вид

$$y_{t0} = f_1(t, \tau) + f(y_{t-1,0}, y_{t-2,0}, \dots, y_{t-g,0}, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}, \\ u_{t,0}, u_{t-1,0}, \dots, u_{t-g,0}, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-p}),$$

где f_1 задает двухмерную функцию тренда.

Для улучшения прогнозирующих свойств сезонных моделей рекомендуется учитывать интегральные слагаемые уравнений, дискретным аналогом которых являются суммы данных. Как показывает практика, благодаря включению сумм повышаются сходимость и точность пошагового интегрирования.

В алгоритмы самоорганизации для желательной месячной модели можно включать следующие суммы:

$$S_{yt-t,i}^k = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} y_{t-t-r,i} \quad i = 1, 2, \dots, g; \\ j = 1, 2, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots, 12.$$

Здесь $S_{yt-t,i}^k$ означает среднюю сумму выходной величины за k временных интервалов, начиная с момента времени $t - i - js$ (т. е. i временных запаздываний по шкале t и j временных запаздываний по шкале τ).

Если же включается только одна сумма, то нужно выбрать ту, которая позволяет получить наилучшие значения критерия селекции. Для этой цели нужно выбирать различные k . В сезонных моделях часто используются $k = 3$ (квартал) и $k = 12$ (год).

Пример 30. Прогноз качества воды в Каховском водохранилище [35, 62]. При использовании для прогноза полученной в разд. 3.3.3 системы разностных уравнений потребуются прогнозируемые значения воздействий u_t . Оказывается (см. разд. 3.5), что для u_1 , u_2 и u_5 нельзя получить никаких достаточно хороших значений прогноза, поэтому нецелесообразно учитывать эти воздействия при дальнейшем моделировании.

Для трех параметров состояния (x_1 , x_4 , x_6) и трех воздействий (u_3 , u_4 , u_6) с помощью комбинаторных алгоритмов были получены линейные сезонные модели, причем двухмерная временная шкала t , τ означает кварталы и годы. Для x_1 при этом полная модель имеет вид

$$x_{1t,0} = a_0 + a_1 x_{1t-1,0} + a_2 x_{1t-2,0} + a_3 x_{1t-3,0} + a_4 x_{1t,-1} + a_5 x_{4t,0} + a_6 x_{4t,-1,0} + \\ + a_7 x_{4t-2,0} + a_8 x_{4t-3,0} + a_9 x_{4t,-1} + a_{10} x_{6t,0} + a_{11} x_{6t-1,0} + a_{12} x_{6t-2,0} + a_{13} x_{6t-3,0} + \\ + a_{14} x_{6t,-1} + a_{15} u_{3t,0} + a_{16} u_{3t-1,0} + a_{17} u_{3t-2,0} + a_{18} u_{3t-3,0} + a_{19} u_{3t,-1} + a_{20} u_{4t,0} + \\ + a_{21} u_{4t,-1,0} + a_{22} u_{4t-2,0} + a_{23} u_{4t-3,0} + a_{24} u_{4t,-1} + a_{25} u_{6t,0} + a_{26} u_{6t-1,0} + \\ + a_{27} u_{6t-2,0} + a_{28} u_{6t-3,0} + a_{29} u_{6t,-1}.$$

Как указывалось выше, для улучшения прогноза можно дополнительно включать в моделирование еще суммы всех величин. Полезными оказались среднегодовые значения $S_{x,t}^4$ и $S_{u,t}^4$, а также их запаздывания. Из полного описания, состоящего из 41-го слагаемого, при помощи комбинаторных алгоритмов самоорганизации с применением комбинаторного критерия минимума смещения и критерия точности краткосрочного прогноза были получены сезонные модели для четырех времен года

В результате дальнейших исследований, касающихся применимости долгосрочного прогноза (разд. 4.5.2), лучшими оказались следующие уравнения:

28. Параметры водохранилищ Днепровского каскада

Водохранилище	u_{c1} , дн	u_{c2} , тыс га	u_{c3} , км ²	u_{c4} , %	u_{c5} , тыс га
1	30	92	3,73	18,5	17
2	120	225	13,5	8	18
3	15	56,5	2,45	17	9,6
4	30	40	3,30	22,5	9
5	150	220	18,3	2	4,4

для зимы (декабрь — февраль)

$$x_{1t,0} = -63,317 - 7,264 x_{6t-1,0} + \\ + 0,951 s_{u_{4t-1,0}}^4;$$

для весны (март — май)

$$x_{1t,0} = 1808,85 - 27,858 x_{6t-3,0};$$

для лета (июнь — август)

$$x_{1t,0} = 5258,06 - 2,319 x_{1t-2,0} - \\ - 0,043 x_{1t-3,0};$$

для осени (сентябрь — ноябрь)

$$x_{1t,0} = 27872,6 - 3175,72 x_{4t-3,0}.$$

Приняв, что структура сезонных моделей Каховского водохранилища одинакова для всех водохранилищ Днепровского каскада, получим коэффициенты сезонных моделей всех водохранилищ, для чего необходимо использовать приведенные в табл. 28 показатели систем. Задав структуру сезонной модели, аналогичной полученной в этой главе, определим следующие общие сезонные модели для показателя биомассы фитопланктона:

зима

$$x_{1t,0} = a_1 + a_2 x_{6t-1,0} + a_3 s_{u_{4t-1,0}}^k;$$

весна

$$x_{1t,0} = a_4 + a_5 x_{6t-3,0};$$

лето

$$x_{1t,0} = a_6 + a_7 x_{1t-2,0} + a_8;$$

осень

$$x_{1t,0} = a_9 + a_{10} x_{4t-3,0}.$$

29. Оценки коэффициентов сезонных моделей для переменной

Коэффициент	Водохранилище				
	1	2	3	4	5
a_1	-548,63	-20,952	127,194	7,586	-63,317
a_2	3,247	-0,243	0,624	-0,139	-7,264
a_3	1,828	-0,083	-0,282	0,007	0,931
a_4	286,692	3635,9	795,740	101,852	1808,85
a_5	-1,7	-0,005	-7,189	1,321	-27,838
a_6	704,267	3321,26	750,797	2676,86	5258,06
a_7	38,52	-322,1	2,663	-76,163	-2,319
a_8	0,7	0,5339	2,0562	0,6019	-0,10431
a_9	3637,56	18067,9	69809,2	9205,35	27872,6
a_{10}	-475	-2216,63	-8607,19	-1093,79	-3175,72

По реализациям 5 специфических для водохранилищ характеристик u_{ctj} , $i = 1, 2, \dots, 5$, $j = 1, 2, \dots, 5$ (табл. 29) могут быть получены модели $a_k = g_k(u_0)$ для 10 параметров. Ввиду малого количества имеющихся в таблице точек, рекомендуется применять УКР. Определим таким способом следующие аналитические выражения для параметров a_k :

$$a_1 = -3372,110 + 71,437 u_1 - 431,571 u_3 + 8602,84 \cdot 1/u_5;$$

$$a_2 = -2,390 - 0,045 u_1 + 0,420 u_5 - 5,147 \cdot 1/u_1;$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= 11,114 - 0,290u_1 + 1,909u_3 - 28,707 \cdot 1/u_3; \\
a_4 &= -5170,17 + 71,883u_1 + 17853,300 \cdot 1/u_3 - 20733,7 \cdot 1/u_3; \\
a_5 &= 10,567 - 204,895 \cdot 1/u_1 - 74,008 \cdot 1/u_4; \\
a_6 &= 1694,100 + 85,934u_1 - 37,387u_2 - 2201,0203 \cdot 1/u_4; \\
a_7 &= 1050,19 - 8,825u_2 + 58,203u_3 - 38725,5 \cdot 1/u_3; \\
a_8 &= 11,507 - 0,038u_2 - 0,362u_4 - 11,017 \cdot 1/u_3; \\
a_9 &= -96715,800 + 1650,87u_1 - 7621,22u_3 + 213460 \cdot 1/u_1; \\
a_{10} &= 1,198 \cdot 10^4 - 219,095u_1 + 1,07799 \cdot 10^3u_3 - 2,99231 \cdot 10^5 \cdot 1/u_1.
\end{aligned}$$

Числовые значения для времени полного обмена u_{c1} , площади поверхности воды u_{c2} , объема воды u_{c3} , части поверхности с глубиной менее 1 м u_{c4} и площади отелей u_{c5} приведены в табл. 28, а для коэффициентов a_1 — a_{10} — в табл. 29.

Полученная система сезонных моделей может применяться для прогноза отдельных показателей (x_1 , x_4 , x_8) в соответствующих водохранилищах, а также и в других водохранилищах с сопоставимыми свойствами. Кроме того, ее можно применять для прогнозирования свойств проектируемых систем.

Так был получен прогноз ожидаемого изменения биомассы фитопланктона в Каховском водохранилище после существенного изменения площади мелководий (с 17 до 8,5 тыс. га) при незначительном изменении всех других параметров. Подставив в уравнение для параметра a_1 новые значения, влияющие на u_{c2} , u_{c3} и u_{c5} , получим в качестве сезонных моделей

для зимы

$$x_{1t,0} = -63,317 - 8,25x_{6t-1,0} + 0,9315x_{4t-1,0};$$

для весны

$$x_{1t,0} = 1712,291 - 55,58x_{6t-3,0};$$

для лета

$$x_{1t,0} = 4240,29 + 15,42x_{1t-2,0} - 2,139x_{1t-3,0};$$

для осени

$$x_{1t,0} = 27872,6 - 3175,72x_{2t-3,0}.$$

Прогноз с помощью этой модели до 2000 г. (см. разд. 4.5.2) показывает, что при уменьшении площади мелководий наполовину биомасса фитопланктона уменьшается на 64,3 %.

Пример 4*. Прогноз динамики роста стебля яровой пшеницы [24, 86]. По наблюдениям параметров состояния x_i ($i = 1, \dots, 4$) и воздействий u_j ($j = 1, 2, 3$) за 8 декад (с 20 апреля по 29 июня 1973 г.) необходимо построить модель для прогноза динамики роста заданного сорта пшеницы в виде

$$x_{t+1} = f(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-g}, u_{t+1}),$$

где прогнозы u_{t+1} нужно получить при помощи соответствующего метода экстраполяции.

До применения самоорганизации функции $f_i(\dots)$ предварительно аппроксимируются полиномами, причем должно получиться следующее описание (g было выбрано равным двум единицам времени):

$$x_{t+1} = A(x) + B u_{t+1},$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) & \dots & A_{14}(x_4) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{41}(x_1) & \dots & A_{44}(x_4) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix}$$

* Продолжение прим. 4.

и, например,

$$\begin{aligned}
A_{11}(x_1) &= a_0 + a_1x_{1t} + a_2x_{1t-1} + a_3x_{1t-2} + a_1x_1^2 + a_2x_{1t-1}^2 + a_3x_{1t-2}^2 + \\
&+ a_7x_{1t}x_{1t-1} + a_8x_{1t}x_{1t-2} + a_9x_{1t-1}x_{1t-2}.
\end{aligned}$$

Для селекции применялись последовательно критерий регулярности, критерий минимума смещения, а также критерий баланса. В качестве функции баланса можно использовать естественную связь между суммарной биомассой и параметрами состояния x_1 и x_2 . Из всех имеющихся уравнений по критерию минимума смещения выбиралось $F_1 = 100$ уравнений, параметры которых вновь оценивались по совокупности наблюдений N . Затем следовал отбор по критериям регулярности $F = 10$ лучших моделей для x_1 , x_2 , x_3 , x_4 . В результате применения критерия баланса из 10 возможных комбинаций пар сезонных и годовых моделей были найдены модели оптимальной сложности. Для трех вариантов внесения минеральных удобрений были получены следующие модели (t дает ошибку пошагового прогноза $I^2(N)$)

вариант 1

$$x_{1t+1} = 0,54x_{1t} + 0,901x_{2t} + 0,45x_{3t} - 1,577 \cdot 10^{-3}u_{2t+1}, \quad I^2(N) = 8,4 \%;$$

$$\begin{aligned}
x_{2t+1} &= 1,125x_{2t} - 0,032x_{3t} + 1,837 \cdot 10^{-4}u_{1t+1} + 7,539 \cdot 10^{-3}u_{2t+1} - \\
&- 1,311 \cdot 10^{-3}u_{3t+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{3t+1} &= -4,077x_{1t} + 0,995x_{2t} + 1,184x_{3t} + 1,497 \cdot 10^{-4}u_{1t+1} + 0,00188u_{2t+1}, \\
I^2(N) &= 10 \%;
\end{aligned}$$

$$x_{4t+1} = -10,06x_{2t} + 0,948x_{4t} + 1,334 \cdot 10^{-3}u_{1t+1} + 0,1768u_{2t+1}, \quad I^2(N) = 27,4 \%;$$

вариант 2

$$\begin{aligned}
x_{1t+1} &= 0,494x_{1t} + 1,091x_{2t} + 0,572x_{3t} + 1,917 \cdot 10^{-4}u_{1t+1} - 7,873 \cdot 10^{-3}u_{2t+1}, \\
I^2(N) &= 12,1 \%;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{2t+1} &= -0,02x_{1t} + 1,088x_{2t} + 1,286 \cdot 10^{-4}u_{1t+1} + \\
&+ 6,826 \cdot 10^{-3}u_{2t+1} - 8,321 \cdot 10^{-4}u_{3t+1}, \quad I^2(N) = 5,3 \%;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{3t+1} &= -0,325x_{1t} + 0,723x_{2t} + 1,193x_{3t} + 1,32 \cdot 10^{-4}u_{1t+1} + 0,0237u_{2t+1}, \\
I^2(N) &= 10,8 \%;
\end{aligned}$$

$$x_{4t+1} = -2,293x_{1t} + 1,072x_{4t} + 7,531 \cdot 10^{-3}u_{1t+1}, \quad I^2(N) = 37,4 \%;$$

вариант 3

$$\begin{aligned}
x_{1t+1} &= 0,507x_{1t} + 0,828x_{2t} + 1,689 \cdot 10^{-4}u_{1t+1} - 7,578 \cdot 10^{-3}u_{2t+1}, \\
I^2(N) &= 12,1 \%;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{2t+1} &= -0,0398x_{1t} + 0,9x_{2t} + 0,035x_{3t} + 1,622 \cdot 10^{-5}u_{1t+1} + \\
&+ 7,402 \cdot 10^{-7}u_{2t+1} - 6,222 \cdot 10^{-5}u_{3t+1}, \quad I^2(N) = 5,3 \%;
\end{aligned}$$

$$x_{3t+1} = -0,293x_{1t} + 0,265x_{2t} + 1,26x_{3t} + 0,0265u_{2t+1}, \quad I^2(N) = 11,7 \%;$$

$$x_{4t+1} = -2,48x_{1t} + 1,113x_{4t} + 8,178 \cdot 10^{-3}u_{1t+1}, \quad I^2(N) = 32,6 \%;$$

Для всех трех вариантов внесения минеральных удобрений были получены линейные модели. В табл. 30 приведены результаты прогноза для четырех различных

30. Результаты прогноза динамики роста пшеницы для четырех вариантов орошения

Декада	Вариант орошения	Параметры состояния пшеницы				Декада	Вариант орошения	Параметры состояния пшеницы			
		x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	0,001	0,006	0,003	0,027	5	1	0,279	0,091	0,504	1,889
	2	0,001	0,006	0,003	0,027		2	0,279	0,091	0,504	1,889
	3	0,001	0,006	0,003	0,027		3	0,279	0,095	0,508	1,917
	4	0,001	0,006	0,003	0,027		4	0,280	0,094	0,508	1,901
2	1	0,017	0,010	0,074	0,489	6	1	0,451	0,119	0,686	1,959
	2	0,017	0,010	0,074	0,489		2	0,451	0,119	0,686	1,959
	3	0,017	0,010	0,074	0,489		3	0,456	0,124	0,694	1,955
	4	0,017	0,010	0,074	0,489		4	0,455	0,125	0,695	1,962
3	1	0,046	0,033	0,185	1,233	7	1	0,655	0,118	0,803	1,239
	2	0,046	0,033	0,185	1,233		2	0,655	0,121	0,806	1,258
	3	0,046	0,033	0,185	1,233		3	0,667	0,129	0,820	1,217
	4	0,046	0,033	0,185	1,233		4	0,668	0,131	0,823	1,222
4	1	0,129	0,069	0,340	1,852	8	1	0,817	0,120	0,868	1,657
	2	0,129	0,069	0,340	1,852		2	0,820	0,127	0,876	1,674
	3	0,129	0,069	0,340	1,852		3	0,840	0,137	0,899	1,567
	4	0,129	0,070	0,341	1,859		4	0,844	0,142	0,906	1,568

вариантов орошения. Полученное качество прогноза составляет 5—10 % для параметров состояния x_1 и x_2 .

При сравнении структур полученных моделей можно легко установить хорошее совпадение для всех вариантов. В соответствии с этим возможно обобщенное представление в виде

$$\underline{x}_{t+1} = A \underline{x}_t + B \underline{u}_{t+1},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты a_{ij} , b_{ik} определяются в зависимости от трех вариантов внесения удобрений, например:

$$a_{ij} = d_{ij} + d_{1i}N + d_{2i}P + d_{3i}K,$$

где N — азот; P — фосфор; K — калий. Очевидно, что во всех трех вариантах доля перечисленных компонент в минеральных удобрениях находится в определенном соотношении (N : P : K = 8 : 7 : 3), поэтому все коэффициенты линейно зависят от K: N = 8/3K, P = 7/3K.

В дальнейшем были получены квадратичные модели:

$$a_{ij} = c_{ij} + c_{1i}k + c_{2i}k^2,$$

где k — внесенные минеральные удобрения (0,1 кг/га). Были построены следующие модели [24]

$$x_{1t+1} = a_{11}(k)x_{1t} + a_{12}(k)x_{2t} + a_{13}(k)x_{3t} + b_{11}(k)u_{1t+1} + b_{12}(k)u_{2t+1},$$

где

$$a_{11}(k) = 0,5342 - 0,0239k + 0,0047k^2;$$

$$a_{12}(k) = 0,9888 + 0,04661k^2;$$

$$a_{13}(k) = 0,443 + 0,0342k + 0,00296k^2;$$

$$b_{11}(k) = (0,954 + 0,4728k + 0,0504k^2) 10^{-4};$$

$$b_{12}(k) = -(3,579 + 1,982k - 0,1834k^2) 10^{-3};$$

$$x_{2t+1} = a_{21}(k)x_{1t} + a_{22}(k)x_{2t} + a_{23}(k)x_{3t} + b_{21}(k)u_{1t+1} + b_{22}(k)u_{2t+1} + b_{23}(k)u_{3t+1},$$

где

$$a_{21}(k) = -0,0493 - 0,00161k + 0,61 \cdot 10^{-5}k^2;$$

$$a_{22}(k) = 1,015 - 0,06578k + 0,00777k^2;$$

$$a_{23}(k) = 1,015 - 0,0658k + 0,00206k^2;$$

$$a_{21}(k) = (1,299 - 0,2349k + 0,0076k^2) 10^{-4};$$

$$b_{22}(k) = (6,474 - 0,088k + 0,04044k^2) 10^{-3};$$

$$b_{23}(k) = (-9,282 + 1,5554k + 0,01867k^2) 10^{-4};$$

$$x_{3t+1} = a_{31}(k)x_{1t} + a_{32}(k)x_{2t} + a_{33}(k)x_{3t} + b_{31}(k)u_{1t+1} + b_{32}(k)u_{2t+1},$$

где

$$a_{31}(k) = -0,4077 + 0,3673k - 0,00306k^2;$$

$$a_{32}(k) = 0,9554 - 0,0568k - 0,007k^2;$$

$$a_{33}(k) = 1,184 - 0,0045k + 0,0025k^2;$$

$$b_{31}(k) = (1,497 - 0,0965k + 0,125k^2) 10^{-4};$$

$$b_{32}(k) = (1,883 + 0,245k - 0,02766k^2) 10^{-2};$$

$$x_{4t+1} = a_{41}(k)x_{1t} + a_{42}(k)x_{2t} + a_{44}(k)x_{4t} + b_{41}(k)u_{1t+1} + b_{42}(k)u_{2t+1},$$

где

$$a_{41}(k) = 1,122 - 1,1336k + 0,1648k^2;$$

$$a_{42}(k) = 16,56 + 66,3646k - 0,8893k^2;$$

$$a_{44}(k) = 1,079 - 0,05166k + 0,00922k^2;$$

$$b_{41}(k) = (1,035 + 0,5375k + 0,03438k^2) 10^{-3};$$

$$b_{42}(k) = 0,1855 + 0,00057k + 0,00032k^2.$$

Полученные модели справедливы только вблизи интервала интерполяции. Внешние воздействия можно задать следующей областью определения: $50 \leq u_1 \leq 100$, $0,5 \leq u_2 \leq 6$, $10 \leq u_3 \leq 300$.

3.4. САМООРГАНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ [24, 34, 44]

Физическое поле можно представить как непрерывное множество взаимодействующих частиц. При этом на данную частицу поля может оказывать наибольшее влияние состояние как соседних (принцип

ближнего действия), так и весьма удаленных частиц (принцип дальнего действия *), или матрицы вход-выход. Поле может быть трехмерным или плоским, двумерным или линейным, т. е. одномерным.

Цель моделирования физических полей — получение уравнения, достаточно точно описывающего состояние каждой частицы поля. В математической физике модель поля получают, исходя из априорной информации о законах взаимодействия частиц, например таких, как принцип неразрывности и сохранения массы. Взаимодействие элементов поля указывается человеком — автором модели.

При использовании методов самоорганизации вычислительная машина перебирает большое число уравнений различной структуры (сложности) и выбирает одно из них (или систему уравнений), которое обеспечивает минимум внешнего критерия на заданных опытных данных. Критерий указывается человеком. По глубине минимума критерия можно определить, удалось ли машине найти модель или нет.

Модели могут быть точечными (одномерными) или пространственными (двух- и трехмерными). Кроме того, модели различаются по числу учитываемых факторов (скалярные или векторные модели).

Если модель строится по данным наблюдений, в которых не указано пространственное размещение датчиков (или контрольных станций), то она называется точечной. Имеется основание действовать так, будто все данные собраны в одной точке пространства.

Модель называется пространственной, или моделью поля, если в исходных данных содержится информация о размещении контрольно-измерительных станций в пространстве. Пространственные модели требуют наличия не менее трех измерительных станций по каждой оси. Модели с одним аргументом называются одномерными, а с несколькими — многомерными.

Дифференциальные уравнения диффузии. Установившееся поле диффузии вещества в однородной среде описывается уравнениями закона Фика:

одномерное поле

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \quad \text{или} \quad D_x \frac{\partial q}{\partial x} + q = 0;$$

двухмерное поле

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0;$$

трехмерное поле

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0.$$

* Принцип дальнего действия не является признанием действия на расстоянии, т. е. без физической связи двух частиц. Материальная связь удаленной и данной частиц существует в физическом поле всегда и учитывается при помощи указанной матрицы.

Динамический (переходный) процесс установления поля во времени описывается уравнениями, содержащими дополнительно первую производную по времени (уравнения параболического типа):

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0.$$

Если поле распространяется в потоке, имеющем скорость движения U_x , то добавится еще один член (для краткости далее записывается только уравнение одномерной диффузии вдоль оси водотока);

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + U_x \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Наконец, если вещество является неконсервативным, а разрушается со скоростью γ , то будет присутствовать еще одно слагаемое γq :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + U_x \frac{\partial q}{\partial x} + \gamma q = 0.$$

Если концентрация загрязняющего вещества измеряется по абсолютной величине, то в правой части приведенных выше уравнений следует поставить не нуль, а некоторую постоянную — интенсивность потока загрязнения, распределенного по пространству поля. При переменной интенсивности в правой части уравнения следует поставить $f(t)$, а при неравномерном распределении потока — $f(t, x)$. Конечно-разностный аналог уравнения в общем случае будет иметь вид $(q_{+10} - q_{00}) + D_x (q_{+10} - 2q_{00} + q_{-10}) + U_x (q_{0+1} - q_{00}) + \gamma q_{00} = f(t_{00} x_{00})$.

Это уравнение называется уравнением параболического типа. Оно действительно при бесконечной скорости распространения загрязнения по ширине водотока. Для учета конечной скорости распространения следует добавить в уравнение вторую производную по времени (уравнение гиперболического типа):

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a \frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - U_x \frac{\partial q}{\partial x} + \gamma q = f(t, x),$$

$$(q_{0+1} - 2q_{00} + q_{0-1}) + a (q_{+10} - q_{00}) + D_x (q_{+10} - 2q_{00} + q_{-10}) + U_x (q_{0+1} - q_{00}) + \gamma q_{00} = f(t_{00} x_{00}).$$

Заметим, что процесс турбулентной диффузии веществ в газе или в жидкости еще не имеет вполне определенного и адекватного описания — математического. Параболическое уравнение, основанное на законах Фика и сохранения массы, не описывает образования пятен и струй, наблюдаемых в водоемах. Гиперболическое уравнение (выво-

димое только для одномерного случая), основанное на теории соударения твердых частиц, также является только некоторым приближением к адекватному описанию турбулентного движения. Образование указанных особенностей могут объяснить только интегро-дифференциальные уравнения, все еще недостаточно исследованные в математике.

Вот почему при самоорганизации модели турбулентной диффузии важно не забыть предоставить машине возможность выбрать наряду с другими аргументами суммы аргументов — аналоги интегральных слагаемых уравнения диффузии. Обратный переход от разностных уравнений к интегро-дифференциальным помогает выяснить действительный вид непрерывных уравнений и сложные законы, скрытые в исходной таблице опытных данных, если таблица опытных данных содержит достаточную информацию.

3.4.2. РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Данные измеряются при помощи датчиков, установленных на контрольных станциях, или получаются при помощи лабораторных анализов. На станциях в простейшем случае может измеряться только одна переменная. Получаемая при этом модель является одномерной и выражается одним уравнением. При измерении нескольких взаимосвязанных переменных модель получается многомерной и может выражаться системой взаимосвязанных уравнений.

Измерения на контрольных станциях выполняются дискретно, например один раз в 1 ч или в 1 сут. Показания непрерывных датчиков обычно усредняются также за определенный период съема данных, что вызывает необходимость перехода от непрерывных дифференциальных уравнений к их конечно-разностным аналогам, т. е. к дискретной математике.

Дискретная математика использует замену в дифференциальных уравнениях производных и дифференциалов — конечными разностями, измеряемыми в узлах прямоугольной равномерной пространственной сетки. Например, оси трехмерного пространства с координатами x , y и z дискретизируются на равные участки — шаги, принимаемые обычно за единицу измерения пространства.

Для перехода от непрерывного дифференциального уравнения к конечно-разностному аналогу производные заменяют табличными разностями. В интегро-дифференциальных уравнениях интегралы заменяются соответствующими суммами. Например, для двухуровневой задачи на плоскости $t - q$ действуют такие определения производных и интегралов через «передние» табличные разности и суммы (формулы Эйлера):

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \approx [(q_{+10} - q_{00}) - (q_{00} - q_{10})] = \Delta^2 q;$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} \approx (q_{+10} - q_{00}) = \Delta q;$$

$$t = t_{00}; \quad q = q_{00};$$

$$\int_1^N q dt \approx \sum_1^N q_i;$$

$$\iint_1^N q dt^2 \approx \sum_1^N \sum_1^N q_i \text{ и т. д.}$$

Индекс времени далее пишется на первом месте, т. е. первый индекс относится ко времени t , а второй — к оси q .

В указанном прямом преобразовании непрерывных дифференциальных уравнений в конечно-разностные аналоги используются наиболее простые формулы замены производных табличными разностями, соответствующие формуле Эйлера:

$$q_{+1} = q_0 + \Delta t \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_0 \quad \text{при} \quad \Delta t = 1.$$

Более сложные формулы, например формула трапеций

$$q_{+1} = q_0 + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{dq}{dt} \right)_{+1} + \left(\frac{dq}{dt} \right)_0 \right],$$

используются с целью наибольшего совпадения интеграла непрерывного уравнения и кривой пошагового интегрирования разностного уравнения при более крупном шаге, т. е. для повышения скорости сходимости решения.

При моделировании физических полей необходимо строить пространственное распределение поля. Такие модели необходимы для прогнозирования дальнейшего развития полей как во времени, так и в пространстве. Примерами могут служить распространение загрязнения в экологической системе (водохранилище, воздушном пространстве), радиоактивное поле реактора и т. д.

В отличие от моделей с сосредоточенными параметрами, характерных тем, что все наблюдения относятся к одной и той же точке и не зависят от пространственных координат, рассматриваемые модели являются пространственными (полями), т. е. в модели, наряду с временным развитием отдельных параметров, должно учитываться их пространственное распределение. Для таких пространственных моделей, или моделей с распределенными параметрами, требуется несколько точек замера или измерительных станций по каждой координате. Подходящей структурой математической модели является дифференциальное уравнение в частных производных, в котором содержатся производные по времени и пространственным координатам x , z и др. Аргументами функций, которые находятся как решения уравнения в частных производных, являются наряду с параметрами

где i — номер контрольной станции; j — номер компоненты; τ — временное запаздывание измерения. Так, $u_{j,-3}^1$ означает запаздывание на три временные единицы, измерение второй компоненты воздействия на первой контрольной станции, а $q_{2,0}^2$ — измерение без запаздывания первой компоненты выходной величины на второй контрольной станции. Как и для обычных дифференциальных уравнений при квантовании пространственных и временных координат, так и для дифференциальных уравнений в частных производных получаются дискретные модели в виде разностных уравнений. Таким образом, для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - D_z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + V_x \frac{\partial y}{\partial x} + V_z \frac{\partial y}{\partial z} = f(x, z, t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} \approx y_{000} - y_{00-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \approx y_{000} - y_{0-10}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} \approx y_{000} - y_{-100},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \approx (y_{000} - y_{0-10}) - (y_{0-10} - y_{0-20}) = y_{000} - 2y_{0-10} + y_{0-20};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \approx (y_{000} - y_{-100}) - (y_{-100} - y_{-200}) = y_{000} - 2y_{-100} + y_{-200},$$

$$y_{000} = F(y_{00-1}, y_{0-10}, y_{-100}, y_{0-20}, y_{-200}) + f(x, z, t),$$

Используются наблюдения в различных точках полей, данные о положении, интенсивности и моменте времени воздействия. Для поля загрязнения воды или воздуха это, например, означает наблюдения на различных контрольных станциях, данные о положении источников загрязнения, интенсивности и моментах выброса загрязняющих и

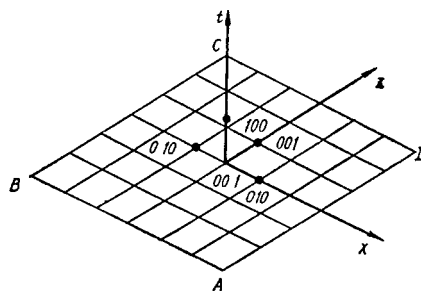


Рис. 3.11. Трехмерный шаблон для моделирования физических полей

В дальнейшем будем различать задачи интерполяции, экстраполяции и прогнозирования. Под интерполяцией понимается моделирование поля в области, лежащей внутри многогранника, угловыми точками которого являются измерительные пункты или контрольные станции (рис. 3.12, *а*). Определение распространения различных величин за пределами этого многогранника будем называть соответственно экстраполяцией. Экстраполяция может осуществляться как

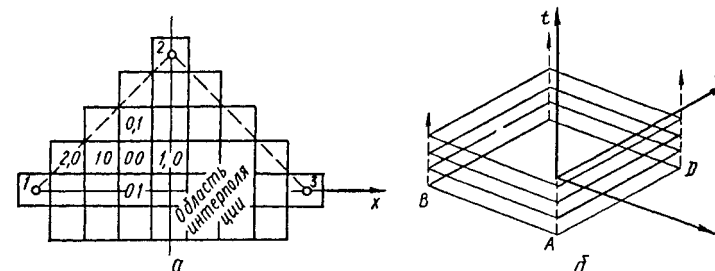


Рис. 3 12 Двух- (а) и трехмерная (б) области интерполяции

$$y_{100} = F_1(y_{000}, y_{00-1}, y_{0-10}, y_{0-20}, y_{-100}) + f(x, z, t);$$

$$y_{010} = F_2(y_{000}, y_{00-1}, y_{0-10}, y_{-100}, y_{-200}) + f(x, z, t).$$

$$y_{001} = F_3(y_{000}, y_{0-10}, y_{-100}, y_{0-20}, y_{-200}) + f(x, z, t).$$

3.4.3. ОБУЧЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ ШАБЛОНОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ПО ВСЕЙ ПЛОЩАДИ ТАБЛИЦЫ ДАННЫХ И ПО ВЕРТИКАЛИ

Модели характеризуются компактным шаблоном, т. е. в связи с допущением непрерывности они учитывают только информацию о ближайшей окрестности (временной, пространственной) текущей точки поля. Шаблон задает точки поля, используемые для нахождения модели. Для отображения одной первой производной достаточно измерений в двух соседних точках поля, для отображения второй производной — в трех точках и т. д. Примеры построения шаблонов типичных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными (t, x) содержатся в табл. 31.

31. Типовые шаблоны и соответствующие им дифференциальные уравнения для двух факторов t и x

Шаблон	Таблица	Модель										
0,0 1,0 →	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,0}$</td></tr><tr><td>—</td><td>—</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	—	—	$\frac{\partial y}{\partial t} + a_1 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,0})$						
$y_{1,0}$	$y_{0,0}$											
—	—											
0,-1 0,0 1,0 → →	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,0}$</td><td>$y_{0,1}$</td></tr><tr><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	—	—	—	$\frac{\partial y}{\partial t} + a_1 \frac{\partial y}{\partial x} + a_2 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,0}, y_{0,-1})$				
$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$										
—	—	—										
0,-1 0,0 0,1 →	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,0}$</td><td>$y_{0,1}$</td><td>$y_{0,-1}$</td></tr><tr><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,-1}$	—	—	—	—	$\frac{\partial y}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial y}{\partial x} + a_3 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,0}, y_{0,1}, y_{0,-1})$		
$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,-1}$									
—	—	—	—									
0,-1 0,0 0,1 → -1,0 0,0 0,1 →	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,0}$</td><td>$y_{0,1}$</td><td>$y_{0,-1}$</td><td>$y_{1,0}$</td></tr><tr><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,0}$	—	—	—	—	—	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial y}{\partial t} + a_3 \frac{\partial y}{\partial x} + a_4 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,0}, y_{0,1}, y_{0,-1}, y_{-1,0})$
$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,0}$								
—	—	—	—	—								

Продолжение табл. 31

Шаблон	Таблица	Модель												
-2,0 0,-1 0,0 0,-1 1,0	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,0}$</td><td>$y_{0,1}$</td><td>$y_{0,-1}$</td><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{2,0}$</td></tr><tr><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,0}$	$y_{2,0}$	—	—	—	—	—	—	$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial y}{\partial t} + a_4 \frac{\partial y}{\partial x} + a_5 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,0}, y_{0,1}, y_{0,-1}, y_{-1,0}, y_{-2,0})$
$y_{1,0}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,0}$	$y_{2,0}$									
—	—	—	—	—	—									
0,-1 1,0	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,-1}$</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,-1}$	$\frac{\partial y}{\partial t} + a_1 \frac{\partial y}{\partial x} + a_2 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,-1})$										
$y_{1,0}$	$y_{0,-1}$													
-1,-2 0,-1 1,0	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,-1}$</td><td>$y_{1,-2}$</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,-2}$	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial y}{\partial t} + a_3 \frac{\partial y}{\partial x} + a_4 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,-1}, y_{-1,-2})$									
$y_{1,0}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,-2}$												
-3,-2 -1,-2 0,-1 1,0	<table><tr><td>$y_{1,0}$</td><td>$y_{0,-1}$</td><td>$y_{1,-2}$</td><td>$y_{2,-3}$</td></tr></table>	$y_{1,0}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,-2}$	$y_{2,-3}$	$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + a_1 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a_4 \frac{\partial y}{\partial t} + a_5 \frac{\partial y}{\partial x} + a_6 y = f(t, x)$ $y_{1,0} = f_1(t, x) + f_2(y_{0,-1}, y_{-1,-2}, y_{-2,-3})$								
$y_{1,0}$	$y_{0,-1}$	$y_{1,-2}$	$y_{2,-3}$											

Если на таблицу исходных данных наложить шаблон (линейный, Г-образный или крестообразный), то он охватит ряд цифр. Каждому положению шаблона на поле таблицы данных соответствует одно условное уравнение. Перемещая шаблон, получают переопределенную систему, содержащую условных уравнений обычно в 5—10 раз больше, чем неизвестных. Система по правилам процедуры Гаусса преобразуется в определенную систему нормальных уравнений с квадратной информационной матрицей. Решение системы нормальных уравнений дает одношаговый прогноз по оси, совпадающей с направлением движения шаблона (например, по оси времени).

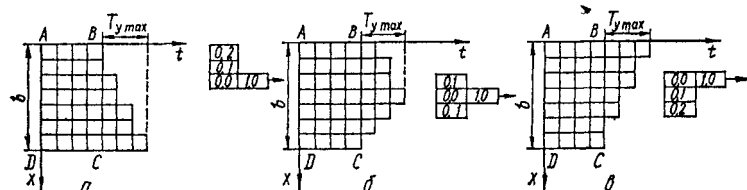


Рис. 3.13. К определению предельно достижимого времени упреждения прогноза

Существуют два способа «обучения» шаблона: 1) если шаблон для получения условных уравнений перемещается по всей плоскости таблицы данных, то получается некоторая усредненная прогнозирующая модель для всего времени наблюдения процесса; 2) если же при обучении шаблон перемещают только по одному из столбцов таблицы, то получают модель для интервала времени, отвечающего данному столбцу (например, модель для сезона года или для месяца и т. п.). При пошаговом прогнозе сезонные и месячные модели используют по очереди, в соответствии с их календарной сменой.

Для физических полей обычно известна структура их математических уравнений, что позволяет заранее определить тип частных моделей — шаблонов и их существенные аргументы. Для того чтобы придать алгоритму самоорганизации необходимую свободу решения, порядок уравнений должен быть повышен на одну или две единицы. При определении оценок коэффициентов модели могут быть применены комбинаторные и многорядные алгоритмы группового учета аргументов.

Для расчета критериев таблица наблюдений делится на обучающую и проверочную выборки. Лучшим оказывается тот шаблон, для которого критерий селекции принимает наименьшее значение. При этом и в качестве критерия селекции применяют комбинированный критерий, чаще всего комбинацию критерия минимума смещения и критерия точности пошагового интегрирования на K шагов вперед. С помощью критерия минимума смещения выбирается наиболее непротиворечивая модель, тогда как критерий пошагового интегрирования, взятый с некоторым коэффициентом веса $\lambda = \beta$, обеспечивает регуля-

ризацию выбора модели (однозначность и нечувствительность к помехам). На рис. 3.13, а показан шаблон, позволяющий получить наибольшее продвижение в нижней части поля экстраполяции, на рис. 3.13, б — в средней его части и на рис. 3.13, в — в верхней части поля.

Пример 31. Прогноз качества воды [36]. На глубине 0,5 м в водном бассейне измерены содержание кислорода y_1 , биохимическое потребление кислорода y_2 и температура t . Наблюдения проводились в трех измерительных пунктах, причем два из них были удалены на 16 и 24 км от первого пункта, в восемь моментов времени с двухнедельными промежутками между ними.

На первом этапе с помощью квадратичной интерполяционной модели удалось 8 значений расширить до 15 недельных значений при дискретизации расстояния с шагом 2 км. Для получения экстраполяционной и прогнозирующей модели был применен полный полином второй степени (первый индекс t , второй x):

$$y_{1(10)} = a_1 y_{1(00)} + a_2 y_{1(-10)} + a_3 y_{1(-20)} + a_4 y_{1(0-1)} + a_5 y_{1(01)} + a_6 y_{2(00)} + a_7 y_{2(-10)} + a_8 y_{2(-20)} + a_9 y_{2(0-1)} + a_{10} y_{2(01)} + a_{11} u_{00} + a_{12} y_{1(00)}^2 + a_{13} y_{1(-10)}^2 + a_{14} y_{1(-20)}^2 + a_{15} y_{1(0-1)}^2 + a_{16} y_{1(01)}^2 + a_{17} y_{2(00)}^2 + a_{18} y_{2(-10)}^2 + a_{19} y_{2(-20)}^2 + a_{20} y_{2(0-1)}^2 + a_{21} y_{2(01)}^2 + a_{22} u_{00}^2 + a_{23} y_{1(00)} y_{1(-10)} + a_{24} y_{1(00)} y_{1(-20)} + \dots + a_{77} y_{2(01)} u_{00}.$$

С помощью алгоритма группового учета аргументов и при помощи критерия минимума смещения была определена лучшая модель (на каждом ряду отбиралось по 20 лучших):

для экстраполяции

$$y_{1(01)} = 9,6915 + 0,0299 y_{2(00)} + 0,0348 y_{2(10)} y_{2(-20)};$$

$$y_{2(01)} = 0,647 - 0,163 y_{2(0-2)} + 0,0001 y_{2(00)}^2 - 0,0003 y_{2(00)} y_{2(0-2)} - 0,0003 y_{2(00)} y_{2(-10)} + 0,077 y_{2(0-1)} y_{2(0-2)} - 0,0013 y_{2(-10)} y_{2(0-1)} + 0,0458 y_{2(0-2)}^2 + 0,331 y_{2(-10)}^2 + 0,0005 y_{2(-10)} y_{1(10)};$$

для прогноза

$$y_{1(10)} = 6,37 + 0,1958 y_{2(00)} y_{1(01)} + 0,00056 y_{1(01)} y_{2(0-1)};$$

$$y_{2(10)} = 1,496 - 0,0006 y_{2(00)} + 0,0003 y_{2(00)} y_{2(-10)} + 0,0166 y_{2(00)} y_{1(-20)} + 0,0112 y_{2(-10)} y_{1(0-1)} - 0,0045 y_{1(-20)} y_{1(0-1)}.$$

3.4.4. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ

В зависимости от учитываемых в модели аргументов и предполагаемого применения можно использовать различные методы ее построения.

Метод 1 характеризуется применением интерполяции и двухступенчатой структурой. На первом этапе в пределах области интерполяции вычисляются значения переменных для всех точек сетки, например при помощи кубических сплайнов. Затем на втором этапе строится система разностных уравнений, с помощью которой осуществ-

ляется экстраполяция и прогноз. Приведенный в разд. 3.4.2 пример соответствует такому двухэтапному подходу.

Метод II учитывает временное изменение внутренних воздействий (источников выбросов). Полученные при этом модели непригодны для дальнейшей экстраполяции за пределы области расположения контрольных станций.

Метод II.1 Использование информации контрольных станций. Для i -й контрольной станции получаем следующую прогнозирующую модель:

$$y_{i(1)}^s = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^m P_{si}(y^s),$$

где $\underline{y}^s = (y_{1(0)}^s, y_{1(-1)}^s, y_{1(-2)}^s, \dots, y_{1(-g)}^s, \dots, y_{n(-g)}^s)$

— вектор измеряемых величин; P — оператор полинома; m — число контрольных станций; n — число измеряемых величин; g — максимальное временное запаздывание. Для $m = 3$ и $g = 2$ получаем прогноз первой измеряемой величины первой точки замера (контрольной станции) в виде суммы двух полиномов:

$$y_{1(1)}^s = P_{21}(y_{1(0)}^2, y_{1(-1)}^2, y_{1(-2)}^2, y_{2(0)}^2, y_{2(-1)}^2, y_{2(-2)}^2) + P_{31}(y_{1(0)}^3, y_{1(-1)}^3, y_{1(-2)}^3, y_{2(0)}^3, y_{2(-1)}^3, y_{2(-2)}^3).$$

Таким образом, измеряемая переменная i -й станции выражается в зависимости от измеряемых величин соседних станций с некоторыми временными запаздываниями.

Метод II.2 Учет информации о «функции источника». В функции источника учитываются внутренние воздействия, например поступления вещества или воды со дна водоема. В этом случае прогноз для i -й станции имеет вид

$$y_{i(1)}^{(t)} = \sum_{s=1}^p Q_{si}(u^s),$$

где p — число воздействий (источников выбросов); $\underline{u}^s = (u_{1(0)}^s, u_{1(-1)}^s, \dots, u_{1(-g)}^s, \dots, u_{n(0)}^s, \dots, u_{n(-g)}^s)$; Q — оператор полинома. Для $n = 2$ и $p = 2$ получают первое измеряемое значение первой контрольной станции из суммы двух полиномов:

$$y_{1(1)}^s = Q_{11}(u_{1(0)}^1, u_{1(-1)}^1, u_{1(-2)}^1, u_{2(0)}^1, u_{2(-1)}^1, u_{2(-2)}^1) + Q_{21}(u_{1(0)}^2, u_{1(-1)}^2, u_{1(-2)}^2, u_{2(0)}^2, u_{2(-1)}^2, u_{2(-2)}^2).$$

Метод II.3 Учет информации о начальных и граничных условиях. Общий подход к моделированию получается при объединении методов II.1 и II.2, т. е. при использовании информации о воздействиях и о близлежащих точках измерений. При этом прогнозируется i -я точка

измерений

$$y_{i(1)}^s = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^m P_{si}(y^s) + \sum_{s=1}^p Q_{si}(u^s).$$

Необходимо учитывать внешние воздействия, например температуру, влажность, силу ветра, и др. Эти величины могут быть аддитивно добавлены в вышеуказанные выражения.

Методы III.1 и III.2. В этом случае методы II.1, II.2 и II.3 комбинируются с методом I, т. е. применяются интерполяционные модели

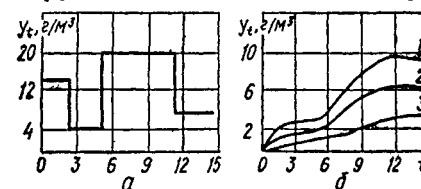


Рис. 3.14. Графики зависимости интенсивности выбросов (а) и концентрации загрязнений (б) от времени

с целью вычисления значений выходной переменной в точках сетки области интерполяции.

Пример 32. Модель поля загрязнения атмосферы в условиях штиля [34]. Для проверки различных подходов при помощи формулы

$$y = \frac{2\pi R}{kx} \int_{x=R/(kt)}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

где k — коэффициент турбулентной диффузии; R — расстояние контрольных станций от источника; t — время от начала выпуска загрязнений до измерения, было вычислено поле для одного источника. На рис. 3.14 показаны графики зависимости интенсивности выброса и концентрации загрязнения от времени.

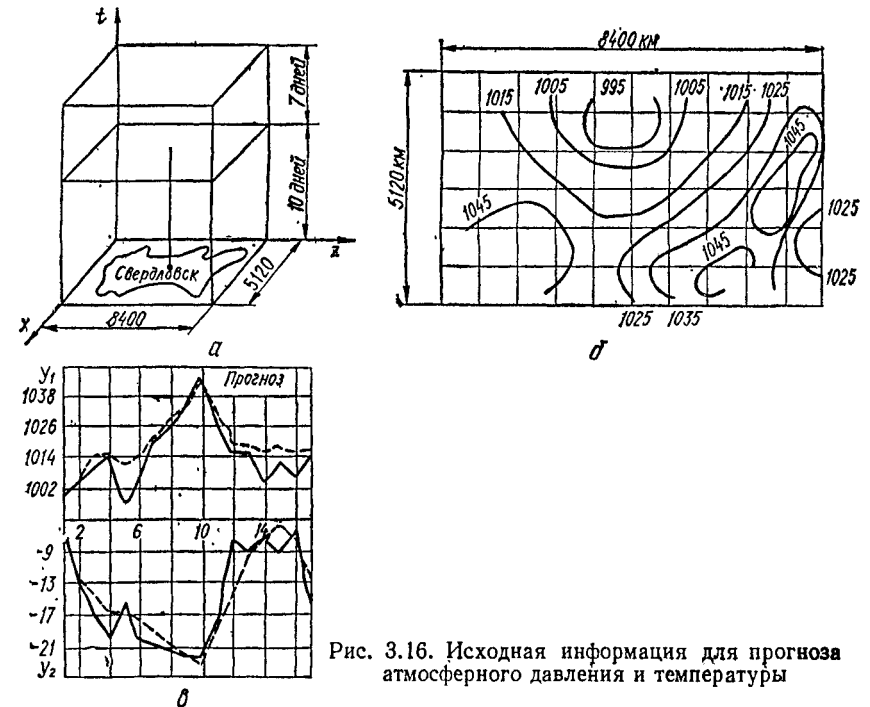
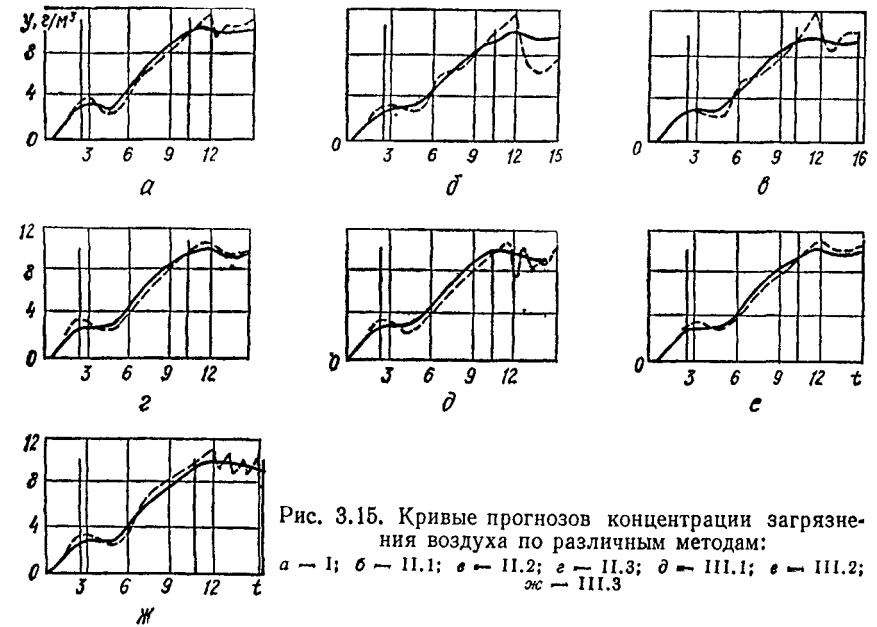
Модели, полученные при помощи самоорганизации, в соответствии с указанными методами приведены в табл. 32, а кривые прогнозов показаны на рис. 3.15.

Интегрированием уравнений моделей, соответствующих методам I и III, можно построить картину поля загрязнения, экстраполировать ее во времени и пространстве. И, напротив, при помощи метода II можно получить только значения величин в точках нахождения контрольных станций. Затем, если использовать эти значения и данные прогноза, то можно осуществить интерполяцию всего поля.

32. Модели поля загрязнения атмосферы

Метод	Модель
I.1	$y_{1(1)}^s = 1,0602 - 0,1779y_{1(0)}^1 + 0,0167y_{1(-2,0)}^1 + 0,0639y_{1(0,-1)}^1 -$ $- 0,0188y_{1(0,1)}^1 + 0,0006y_{1(0,0)}^1 y_{1(1,0)}^1 - 0,0106y_{1(0,0)}^1 y_{1(-2,0)}^1 +$ $+ 0,0023y_{1(0,0)}^1 y_{1(-3,0)}^1 + 0,00001y_{1(0,0)}^1 y_{1(0,1)}^1 - 0,10297y_{1(0,0)}^1 y_{1(0,1)}^1 -$ $- 0,0089y_{1(-1,0)}^1 + 0,0095y_{1(-2,0)}^1 - 0,0091y_{1(1,0)}^1 y_{1(-3,0)}^1 + 0,0089y_{1(-1,0)}^1 y_{1(0,-1)}^1 -$ $- 0,0233y_{1(-1,0)}^1 y_{1(0,-1)}^1 + 0,0019(y_{1(-2,0)}^1)^2 - 0,00358y_{1(-2,0)}^1 y_{1(0,-1)}^1 +$ $+ 0,1785y_{1(-3,0)}^1 y_{1(0,-1)}^1 - 0,252y_{1(-3,0)}^1 y_{1(0,1)}^1 + 0,0089y_{1(-1,0)}^1 y_{1(0,-1)}^1 -$ $- 0,0233y_{1(-1,0)}^1 y_{1(0,1)}^1 + 0,0018(y_{1(-2,0)}^1)^2 + 0,00753y_{1(0,-1)}^1 - 0,0006y_{1(0,-1)}^1 y_{1(0,1)}^1$

Метод	Модель
II.1	$y_{(1)}^1 = 2,7352 + 0,0003y_{(0)}^2 + 0,00001y_{(-2)}^2 - 0,0004y_{(-1)}^3 + 0,00001y_{(-2)}^3 +$ $+ 0,2963y_{(0)}^2y_{(-2)}^2 - 0,6652y_{(0)}^2y_{(0)}^3 + 4,868y_{(0)}^2y_{(-1)}^3 - 1,9596y_{(-1)}^2y_{(-2)}^2 +$ $+ 1,7948y_{(-3)}^2y_{(-1)}^3 + 1,5874y_{(-2)}^2y_{(-3)}^2 - 1,4143(y_{(-3)}^3)^2 + 1,113y_{(-2)}^1y_{(-3)}^3 +$ $+ 1,5139y_{(0)}^3y_{(-2)}^3 - 0,1058y_{(0)}^3y_{(-3)}^3 + 3,88y_{(-2)}^3y_{(-3)}^3 +$ $+ 3,44(y_{(-1)}^3)^2 - 0,387y_{(-1)}^3y_{(-2)}^3 + 9,679y_{(-1)}^3y_{(-3)}^3$
II.2	$y_{(1)}^1 = 2,7371 + 0,000035(u_{(-2)})^2 - 0,000006u_{(0)}u_{(-1)} -$ $- 0,00038u_{(0)}(u_{(-3)})^2 + 0,00039u_{(-1)}(u_{(-2)})^2 +$ $+ 0,00055u_{(-2)}(u_{(0)})^2 - 0,0055u_{(-2)}(u_{(-1)})^2 - 0,000002(u_{(0)})^4 -$ $- 0,000003(u_{(0)})^2(u_{(-3)})^2 + 0,000002(u_{(-1)})^2(u_{(-3)})^2$
II.3	$y_{(1)}^1 = 2,0361 - 2,1816y_{(-1)}^2 - 0,2102y_{(-3)}^2 + 0,0075(u_{(0)})^2 +$ $+ 0,1099y_{(0)}^2y_{(-2)}^2 + 0,392y_{(-1)}^2 + 0,00002(y_{(0)}^2)^2 -$ $- 0,00000y_{(0)}^2y_{(-1)}^3 - 0,000001(y_{(0)}^3)^2$
III.1	$y_{(1,0)}^1 = 2,622 - 0,2516y_{(0,0)}^1y_{(0,0)}^2 + 0,1206(y_{(-1,0)}^1)^2 + 0,0043y_{(-1,0)}^1y_{(-2,0)}^2 -$ $- 0,942y_{(-1,0)}^1y_{(-1,0)}^2 + 0,325y_{(-1,0)}^1y_{(-2,0)}^2 + 0,14y_{(-2,0)}^2y_{(0,0)}^2 +$ $+ 0,0159y_{(0,-1)}^1y_{(0,-1)}^2 + 0,325y_{(-1,0)}^2 + 0,291y_{(-2,0)}^2y_{(0,-1)}^1 -$ $- 2,646y_{(0,0)}^3y_{(-2,0)}^3 + 0,78y_{(-2,0)}^3y_{(0,-1)}^1 - 0,0737y_{(0,-1)}^1y_{(0,1)}^1$
III.2	$y_{(1)}^1 = 0,4228 - 0,779y_{(0,0)}^1 - 0,58y_{(-1,0)}^1 - 0,491y_{(-3,0)}^1 - 0,94y_{(0,-1)}^1 +$ $+ 1,15y_{(0,1)}^1 + 0,044u_{(-2,0)} + 0,0047(y_{(0,0)}^1)^2 + 0,0017y_{(0,0)}^1y_{(-1,0)}^1 +$ $+ 0,0018y_{(0,0)}^1y_{(-2,0)}^1 + 0,0074y_{(-1,0)}^1y_{(-2,0)}^1 - 0,021y_{(-1,0)}^1y_{(-3,0)}^1 +$ $+ 0,0045y_{(-1,0)}^1y_{(0,1)}^1 - 0,0066y_{(-2,0)}^1y_{(0,-1)}^1 - 0,0021y_{(-2,0)}^1y_{(0,1)}^1 +$ $+ 0,019y_{(-3,0)}^1y_{(0,-1)}^1 - 0,0032(y_{(0,-1)}^1)^2 - 0,002y_{(0,-1)}^1y_{(0,1)}^1$



Пример 2а*. Прогноз давления и температуры воздуха.

Для определения модели, пригодной для прогнозирования давления y_1 и температуры y_2 , параллелепипед данных (рис. 3.16, а) делится на элементарные кубики, в которых необходимо определить средние значения метеорологических переменных за 1 сут. В использованном параллелепипеде получилось $5 \times 10 \times 10$ элементарных кубиков, причем отрезок оси x общей длиной 5120 км был разделен на 6 одинаковых частей, отрезок оси z длиной 8400 км — на 10 одинаковых частей, а для оси временного запаздывания использовались суточные реализации (с 11 по 20 марта 1977 г.). Исходная информация представлена в виде карт, например, как изображенные на рис. 3.16, б. Для шести различных элементарных шаблонов с цилиндрическими полярными координатами были определены разностные уравнения для температуры и давления атмосферы, исходя из некоторого полного описания. Например, для давления полное описание было взято в виде

$$y_{1(000)} = f_1(t, x, z) + f_2(y_{1(000)}, y_{1(-100)}, y_{1(-200)}, \dots, y_{2(000)}, y_{2(-100)}, y_{2(-200)}),$$

где индексы относятся последовательно к осям t , x и z . В обучающей и проверочной выборках использовались 80 % реализаций, в экзаменационной — 20 %. Выбор лучшей модели осуществляется по комбинированному критерию, содержащему критерий минимума смещения и критерий точности прогнозирования. Полученные при помощи этой модели прогнозы изображены на рис. 3.16, в. Точность и время упреждения прогноза могут быть повышены применением критерия баланса прогнозов: одного более детального и другого с большим шагом дискретизации переменных.

3.5. ОБЪЕКТИВНЫЙ СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ (ОСА)

ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТА И КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

3.5.1. ОБОБЩЕННЫЙ ЯЗЫК ДИАЛОГА

КАК СРЕДСТВО УМЕНЬШЕНИЯ СТЕПЕНИ УЧАСТИЯ ЧЕЛОВЕКА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА, ПРОГНОЗА И УПРАВЛЕНИЯ

Системный анализ представляет собой моделирование системы взаимодействующих элементов с целью идентификации ее структуры и параметров, кратко- и долгосрочного прогнозов, протекающих в ней процессов, оптимизации и решения задач управления системой.

Системой называется объект исследования (моделирования), который наиболее точно описывается системой уравнений, или множеством систем уравнений. Для того чтобы система уравнений была моделью объекта, она должна иметь решение, т. е. содержать совместные уравнения, и матрица системы должна быть обусловленной. Уравнения, образующие систему, могут быть интегральными, интегро-дифференциальными или алгебраическими, которые приближенно можно заменить их разностными аналогами. Отдельные уравнения системы соответствуют ее элементам (или компонентам). В описании логико-динамических систем присутствуют неравенства, условные переходы и другие логические соотношения. Размерность матрицы системы уравнений определяет границы области моделирования.

* Продолжение прим. 2.

Обычно в процессе имитационного моделирования сложных объектов диалог человек — машина ведется на языке конкретных априорных указаний, без предоставления машине достаточной свободы выбора [39]. Это превращает ЭВМ в некий «большой арифмометр», неспособный внести творческий вклад в процесс моделирования. Действительно, задача интерполяции опытных данных является некорректной, многозначной. Для ее однозначного решения требуется привлечение априорной информации — внешнего дополнения. Однако объем ее может быть различным: в обычных имитационных методах моделирования все основано на очень большом объеме трудно получаемой априорной информации.

Самоорганизация направлена на всемерное уменьшение априорной информации, вносимой в моделирование системы на ЭВМ автором модели. Ее цель — частично устранить участие человека в процессе моделирования (что до создания полной модели интеллекта невозможно), сделать его необременительным и не вызывающим никаких проблем и, следовательно, не требующим привлечения экспертов. Это достигается в информационных эргатических системах при помощи перехода на более общий метаязык диалога человек — машина — язык постановки критериев общего вида, минимум которых находит ЭВМ. От человека требуется только сообщить данные наблюдений и указать критерии самого общего вида, которым должна удовлетворять модель, в некоторых случаях — участвовать в доопределении модели (т. е. в процедуре окончательного ее выбора).

Ниже покажем, что многое еще можно сделать для уменьшения роли человека до такой степени, чтобы его участие в творческом процессе моделирования стало для него совсем необременительным. Принципиально это участие необходимо, но оно столь невелико, что действительно можно говорить о самоорганизации модели почти без участия человека.

3.5.2. ОБЫЧНЫЙ (СУБЪЕКТИВНЫЙ) СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

В качестве примера такого анализа на рис. 3.17 показана структура имитационной системной модели северо-западной части Черного моря [4] (детали модели пока для краткости опускаем). Под действием радиации солнца S при наличии биогенных веществ P и N образуется органическое вещество (переменная x_1 — продукция этого вещества). Бактерии (биомасса x_2) поедают органические вещества, фитопланктон (x_3) поедает бактерии. Зоопланктон (x_4) питается фитопланктоном, а рыбы (ихтиомасса x_5) поедают зоопланктон. Если нас интересует улов рыбы, то для цепочки звеньев поверхностного слоя воды можно записать следующую систему уравнений:

$$\tau_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = a_0 + a_1 S + a_2 P + a_3 N;$$

$$\tau_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = b_0 + b_1 S + b_2 T + b_3 x_1;$$

$$\tau_3 \frac{dx_3}{dt} + x_3 = c_0 + c_1 S + c_2 T + c_3 x_2;$$

$$\tau_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = d_0 + d_1 S + d_2 T + d_3 x_3;$$

$$\tau_5 \frac{dx_5}{dt} + x_5 = e_0 + e_1 S + e_2 T + e_3 x_4.$$

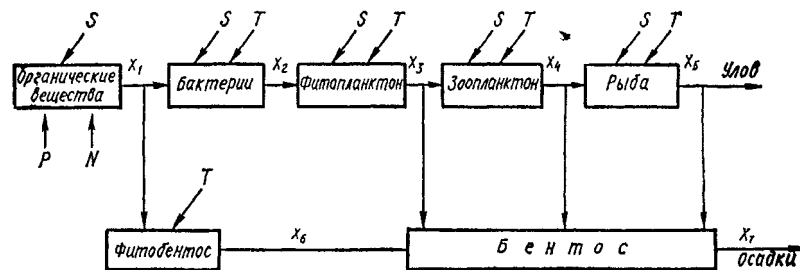


Рис. 3.17. Схема обычного (субъективного) системного анализа

Исключая промежуточные переменные, получаем линейные дифференциальные уравнения пятого порядка для выходной величины x_5 (улов рыбы) и исследуем его решение при заданных начальных условиях. Если уравнения нелинейны, то можно заменить производные разностями и получить процессы при помощи одновременного пошагового интегрирования системы нелинейных уравнений. На данном примере видны основные свойства имитационного моделирования и обычного системного анализа:

1) для моделирования требуется глубокое знание объекта, основанное на большом объеме априорной информации, закладываемой в ЭВМ автором модели;

2) данные наблюдений при этом принципиально не нужны, хотя они и могут использоваться для масштабирования (как в модели динамики Мира [80]) или для получения оценок коэффициентов по методу наименьших квадратов (коэффициенты тоже можно найти, исходя из баланса питания гидробионтов);

3) результаты анализа в данном случае субъективны, так как модель основана на представлении автора механизма данного объекта (сколько авторов, столько и разных моделей). Модель не решает научных споров, часто возникающих среди экспертов по данному объекту;

4) могут быть получены только физические модели, непригодные для долгосрочного прогноза

3.5.3. САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ В ВИДЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Идея нахождения математического описания (модели) данного сложного объекта или процесса при помощи перебора многих вариантов по некоторому ансамблю внешних критериев сначала кажется неосуществимой. Теория самоорганизации моделей направлена на рационализацию перебора в такой степени, чтобы он стал однозначным и реально осуществимым на современной ЭВМ. Прежде всего этому служат многоядные алгоритмы МГУА [39], позволяющие рассматривать изменение до 1000 переменных. Структура модели, характеризующая числом членов и степенью полинома, находится по МГУА при помощи перебора большого числа вариантов по специальным внешним критериям первого уровня (критерии регулярности, минимума смещения, баланса переменных и др.).

Объективный характер МГУА определяется тем, что эксперты назначают только критерии выбора и в остальном в самоорганизацию модели не вмешиваются. В случае разногласия они могут перейти на более высокий уровень критериев (предельная помехоустойчивость, заблаговременность прогнозов, время счета на машине и т. д.), где споры быстро разрешаются. По алгоритмам МГУА решаются задачи объективного системного анализа, нелинейной идентификации и, главное, долгосрочного количественного прогноза процессов.

Практика самоорганизации моделей устранила много заблуждений, господствующих до сих пор в моделировании. Например, всеобщая уверенность в том, что для долгосрочного количественного прогноза нужна физическая модель, адекватная механизму объекта, заводит в тупик. Действительно, если объект существует длительно, то его физическая модель устойчива и, следовательно, прогноз быстро затухает. Физическая модель пригодна только для идентификации объекта и краткосрочного прогноза. Для долгосрочного прогноза ЭВМ по алгоритмам МГУА выбирает нефизические модели.

Недопустимым оказывается также априорное назначение структуры модели, опорных функций и множества переменных, участвующих в моделировании. Для выбора их используется перебор вариантов по внешним критериям (т. е. самоорганизация).

3.5.4. САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (ОСА)

Допустим, что эксперты для решения возможных споров договорились о следующем: машина должна выбрать не одно, как часто бывает при моделировании, а несколько уравнений, образующих совместную систему. Структура каждого уравнения, как и число уравнений, должна быть выбрана так, чтобы модель была непротиворечивой, т. е. соответствовала как всей выборке данных, так и отдельным ее частям.

При этом поступление новых точек измерений не должно существенно изменять ни структуры, ни числа уравнений. Оценки коэффициентов должны оставаться почти неизменными.

Указанный перебор системы уравнений реализует алгоритм ОСА. Системный анализ предшествует моделированию для целей идентификации физической модели и самоорганизации прогнозирующих моделей. В результате анализа находится множество переменных и указывается структура соединения компонентов системы. Анализ осуществляется при помощи опробования ряда гипотез о структуре системы.

Первой проверяется гипотеза о том, что данная система, информация о которой представлена в таблице наблюдений, описывается только одним уравнением вида:

$$x_{i(0)} = a_0 + a_1 x_{i(-1)} + a_2 u, \quad i = 1, \dots, n,$$

где x_i — одна из переменных состояния; u — внешнее экзогенное воздействие (вектор); (-1) — индекс аргумента, запаздывающего на один шаг.

Модели оптимальной сложности получаются из данного полного полинома по однорядному (комбинаторному) алгоритму МГУА [27] и оцениваются по критерию минимума смещения (непротиворечивости):

$$n_{\text{см}}^2 = \sum_{i=1}^n (x_{i(A)} - x_{i(B)})^2 \rightarrow \min,$$

где n — число точек таблицы данных; $x_{i(A)}$ — выход модели, полученной на части таблицы A ; $x_{i(B)}$ — выход модели, полученной на части таблицы B . Комбинаторный алгоритм используется в первом ряду $C_n^1 = n$ раз. Далее во втором ряду используется гипотеза о том, что данная система описывается системой из двух уравнений с одним запаздывающим аргументом вида *:

$$\begin{cases} x_{i(0)} = a_0 + a_1 x_{i(-1)} + a_2 x_{j(0)} + a_3 x_{j(-1)} + a_4 u; \\ x_{j(0)} = b_0 + b_1 x_{i(0)} + b_2 x_{i(-1)} + b_3 x_{j(-1)} + b_4 u. \end{cases}$$

Модели оптимальной сложности снова порождаются данной системой вычеркиванием некоторых членов. Комбинаторный алгоритм МГУА позволяет найти оптимальную систему и оценить каждое из уравнений по критерию минимума смещения $n_{\text{см}}^2$. Системный критерий равен полусумме:

$$n_{\text{см}}^* = (n_{\text{см}_1} + n_{\text{см}_2})/2,$$

где $n_{\text{см}_1}$, $n_{\text{см}_2}$ — минимумы смещения, полученные соответственно по первому и второму уравнению. Система, отвечающая наименьшему смещению $n_{\text{см}}^* \rightarrow \min$, состоит из двух уравнений.

* Разработаны также алгоритмы ОСА для самоорганизации множества систем уравнений.

В третьем ряду алгоритма находится модель системы, состоящая из трех уравнений вида

$$\begin{cases} x_{i(0)} = a_0 + a_1 x_{i(-1)} + a_2 x_{j(0)} + a_3 x_{j(-1)} + a_4 x_{k(0)} + a_5 x_{k(-1)} + a_6 u, \\ x_{j(0)} = b_0 + b_1 x_{i(-1)} + b_2 x_{i(0)} + b_3 x_{i(-1)} + b_4 x_{k(0)} + b_5 x_{k(-1)} + b_6 u; \\ x_{k(0)} = c_0 + c_1 x_{k(-1)} + c_2 x_{i(0)} + c_3 x_{i(-1)} + c_4 x_{j(0)} + c_5 x_{j(-1)} + c_6 u, \end{cases}$$

затем из четырех, пяти и т. д., пока системный критерий минимума смещения не начнет увеличиваться. Система, отвечающая минимуму смещения, определяет множество переменных, описывающих моделируемый объект и его линеаризованную структуру. Обычно минимум наступает для систем, состоящих из трех — пяти уравнений. Чем точнее данные и чем больше информации предоставляется машине для выбора оптимальной области моделирования, тем больше размеры этой области (оптимальное число уравнений), выбираемые машиной.

Модель, получаемая по ОСА, является физической (т. е. адекватной

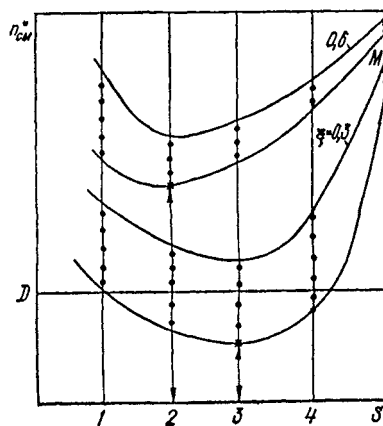


Рис. 3.18. Самоорганизация модели оптимальной сложности в виде системы уравнений. ξ — уровень помех; S — число уравнений, D — уровень доверия

объекту, с легко интерпретируемыми коэффициентами), так как она получается по необходимому условию непротиворечивости, свойственной всем физическим моделям. Достаточные условия указывает критерий экзогенности (разд. 3.3.3).

Обычно результат перебора систем уравнений представляется в виде графика, образец которого показан на рис. 3.18. Из практики применения ОСА установлена ориентировочная граница успеха анализа:

$$D = n_{\text{см}}^* \leq 10^{-5}.$$

Если какое-либо уравнение характеризуется большим значением системного критерия, то оно считается противоречивым и исключается из анализа. Если все уравнения забракованы, то анализ ОСА неудачен. Причины следует искать в отсутствии характеристических переменных в таблице исходных данных или в слишком большой зашумленности их помехами. Способы повышения помехоустойчивости алгоритма ОСА еще не разрабатывались и ждут своих исследователей. Помехоустойчивость зависит от формы математического выражения критериев и от способа свертки критериев отдельных уравнений в общий системный критерий. При указанных выше способах свертки (в виде

арифметического или геометрического среднего) * острый минимум системного критерия $n_{см}^*$ иногда не получается, и это может быть причиной возникновения задачи доопределения модели.

Для доопределения модели все уравнения, характерные точки которых лежат ниже уровня доверия D , считают равноценными и вновь перебирают все системы уравнений, которые можно образовать из них по некоторому главному критерию второго уровня, или снова привлекают экспертов для окончательного выбора системы уравнений. Оптимальная система уравнений определяет собой множество выходных величин и схему соединения отдельных компонентов (см. рис. 3.17), что и позволило назвать перебор систем уравнений по критериям *объективным системным анализом*.

Известный по ряду дискуссий вопрос о том, может ли машина быть умнее человека, мы трансформируем так: можно ли найти представленную на рис. 3.17 модель на машине при помощи ОСА? Если структура модели непротиворечива (в указанном выше смысле), то характеристическая точка модели обязательно будет лежать ниже «уровня доверия» (рис. 3.18), т. е. будет найдена машиной. Если в модели есть ошибка, то машина исправит ее, однако условием успеха является то, что все участвующие в структуре переменные должны быть представлены в таблице данных. Если часть переменных не будет учтена, то машина сможет открыть только частичные непротиворечивые структуры, которые также обычно представляют интерес, если они не слишком очевидны (тривиальны). Примером тривиальных структур является связь концентрации кислорода с его насыщением в процентах и другие известные соотношения.

Переход от разностных уравнений к непрерывному дифференциальному аналогу позволяет получить модели в виде, обычно принятом в математической физике и имитационном моделировании. Разработаны две методики, используемые экспертами для указания состава вектора внешних экзогенных переменных u . По первой из них эксперты указывают внешние воздействия априори, т. е. до запуска программы, а по второй подходящие регулирующие воздействия выбирают по окончании счета из переменных, уже отобранных машиной [41]. Таким образом, участие экспертов для выбора вектора внешних воздействий (особенно регулирующих) пока еще не устранено, хотя и ослаблено. Дальнейшее уменьшение степени участия экспертов дает алгоритм, называемый «алгоритмом открытия закономерностей».

Свойство постепенного наращивания числа характеристических (выходных) переменных по рядам селекции ОСА. Условимся называть выходные величины уравнений, отобранные машиной по алгоритму ОСА, характеристическими переменными. Замечено следующее свойство алгоритма: результат каждого последующего ряда (т. е. увели-

* Лучшей формой свертки критериев отдельных уравнений является алгоритм ортогонального проектирования по Карунену — Лозэу [83] см и с. 213

чение числа уравнений, образующих совместную систему) не отменяет выбор предыдущего ряда, а только дополняет его новыми характеристическими переменными. Это свойство позволило предложить способ значительного сокращения объема вычислений: первым считается ряд с наибольшим объемом счета, на который только способна имеющаяся в распоряжении машина. Остальные ряды просчитываются в пределах множества выходных переменных, уже отобранных машиной при первом счете.

Алгоритм ОСА является средством для выделения небольшого числа наиболее существенных (характеристических) переменных, выбираемых из всех переменных, предложенных ЭВМ. При решении многих практических задач (особенно в экономике, экологии, технике) имеются лишь небольшие выборки наблюдений. Число точек измерений обычно совершенно недостаточно, с точки зрения статистической достоверности моделей, особенно при большом числе переменных. На практике это приводит к субъективному сокращению числа переменных, произвольному выбору выходных величин и упрощению модели, соответственно интуиции лица, строящего модель, или к предварительному отбору переменных на основе статистических методов, служащих для выбора существенных воздействий.

Алгоритм ОСА (разд. 3.5) позволяет наиболее эффективным способом выбрать малое по объему множество характеристических переменных, причем результаты этого выбора, как показало моделирование, не противоречат результатам рангового корреляционного анализа [45].

Результаты ОСА используются при решении двух задач:

- 1) идентификации физической модели, пригодной для краткосрочного прогноза и для «открытия закономерностей»,
- 2) двухуровневого количественного долгосрочного прогноза, основанного на применении прогнозирующих нефизических моделей.

3.5.5. РАЗДЕЛЕНИЕ ВЫХОДНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО СТЕПЕНИ ЭКЗОГЕННОСТИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ОБЪЕКТА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Алгоритм ОСА основан на принципе самоорганизации, т. е. минимуме внешних критериев. Он позволяет найти автономную (замкнутую) систему алгебраических или линейных разностных уравнений, оптимальную для заданных критериев, если предположить, что все переменные, участвующие в уравнениях, являются системными (внутренними) переменными.

Пошаговое интегрирование автономной системы разностных уравнений позволяет получить самый простой сценарий краткосрочного прогноза для случая отсутствия какого-либо специального управления системой (сценарий статус-кво). Прогноз по такому сценарию оказывается полезным именно для того, чтобы обосновать необходимость

специальных мероприятий по управлению для достижения более подходящего хода процессов в моделируемом объекте или чтобы лучше знать ближайшее будущее и таким образом создать общественное понимание происходящего.

Для построения других сценариев приходится априори разделять переменные на системные и внешние (эндогенные и экзогенные), т. е. выбрать возмущающие и управляющие воздействия. Обычно такое разделение переменных выполняется по физическим соображениям, что содержит элемент субъективизма.

Ниже сделана попытка найти более объективный способ разделения переменных при помощи использования критерия экзогенности. Вычеркивая в замкнутой автономной системе те уравнения, выходные переменные которых оказались в наибольшей степени экзогенными, получаем закономерность, действующую в исследуемом объекте в виде недоопределенной системы уравнений, точнее говоря, аппроксимацию закономерности, пригодную для краткосрочного прогноза. При пошаговом интегрировании недоопределенной системы (при задании прогноза изменений экзогенных переменных) получаем ряд других сценариев краткосрочного прогноза, полезных для анализа объекта и принятия решений. Это означает, что изменение внешних воздействий формально аппроксимируется при помощи разностных уравнений. Аппроксимация изменения внешних воздействий при помощи дифференциальных или разностных уравнений в равной степени законна, как и аппроксимация при помощи алгебраических и других уравнений. Ясно, что соответствующие уравнения не являются физическими закономерностями, отражающими механизм возникновения внешних воздействий. Тем не менее они дают возможность определить прогноз изменения внешних воздействий по условию. Все будет идти так, как шло до сих пор.

Описание алгоритма селекции уравнений. Предварительная селекция состояла в том, что все уравнения, для которых $RR = \Delta^2(C) > 1$ из перебора исключались как модели, несущие дезинформацию. Выбор оптимальных моделей проводился на плоскости двух критериев $n_{см}^2 - I^2(N)$ (рис. 3.19).

Общий вид полных полиномов был принят таким.

1-й ряд. Самоорганизация уравнений, содержащих в правой части не более четырех слагаемых вида

$$q_{i(0)} = a_0 + a_1 q_{i(-1)} + a_2 q_{i(-2)} + a_3 q_{i(-3)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

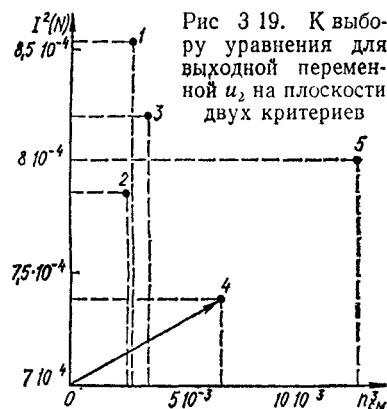


Рис. 3.19. К выбору уравнения для выходной переменной u_i на плоскости двух критериев

2-й вид. Самоорганизация систем из двух уравнений, содержащих в правой части не более восьми слагаемых вида

$$q_{i(0)} = a_0 + a_1 q_{i(-1)} + a_2 q_{i(-2)} + a_3 q_{i(-3)} + a_4 q_{i(0)} + a_5 q_{i(-1)} + a_6 q_{i(-2)} + a_7 q_{i(-3)} + a_7 q_{i(-2)} + a_7 q_{i(-3)}.$$

3-й ряд. Самоорганизация систем из трех уравнений, содержащих в правой части не более двадцати слагаемых вида

$$q_{i(0)} = a_0 + a_1 q_{i(-1)} + a_2 q_{i(-2)} + a_3 q_{i(-3)} + a_4 q_{j(0)} + a_5 q_{j(-1)} + a_6 q_{j(-2)} + a_7 q_{j(-3)} + a_8 q_{k(0)} + a_9 q_{k(-1)} + a_{10} q_{k(-2)} + a_{11} q_{k(-3)},$$

$$i = \overline{1, 17}, \quad j = \overline{1, 17}, \quad k = \overline{1, 17}, \quad i \neq j \neq k.$$

Все системы уравнений получаются автономными, т. е. определенными число переменных в них равно числу знаков равенства. Таким образом, никаких затруднений при пошаговом прогнозе не возникает.

Ряды селекции наращиваются до тех пор, пока не будут достигнуты пределы вычислительных возможностей алгоритма МГУА (20 слагаемых для обычного комбинаторного алгоритма МГУА, до 100 — для алгоритма с перебором по предложению В. С. Степашко [76] и около 300 слагаемых — для многорядных алгоритмов МГУА). Из всех автономных систем уравнений по системному критерию минимума смещения выбираются несколько самых непротиворечивых систем.

3.5.6. ГАРМОНИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ЭКЗОГЕННОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ [41]

Считая каждую из переменных, участвующих в модели, выходной (по очереди), рассматривают динамические модели, указанные в предыдущем разделе [41].

Пользуясь этими моделями, составляют таблицы данных аппроксимации изменения двух переменных (выходной и одного из аргументов по выбору) при постоянстве значений всех других аргументов, т. е. проводят экспертизы на полученных ранее моделях. Причем задача сводится к рассмотрению одной пары переменных, каждая из которых может быть причиной, а другая — следствием или наоборот. Далее находят период самой низкочастотной гармонической составляющей каждой из переменных. Для этого используют следующее уравнение спектрограммы [7]:

$$I(\omega) = \frac{2}{N} \left[\sum_{t=1}^N y_k^2(t) + 2 \sum_{v=1}^{N-1} \sum_{t=1}^{N-v} (y_k(t) - \bar{y}_k)(y_k(t+v) - \bar{y}_k) \cos(v\omega) \right],$$

где N — число точек измерения величин $y_k(t)$, $k = 1, 2$;

$$\bar{y}_k = \sum_{t=1}^N \frac{1}{N} y_k(t).$$

Задавая частоте ω ряд значений 0 до π , строят график $I(\omega)$ до получения первого локального максимума. Он укажет период T и частоту ω самой низкой гармоничной составляющей. Период гармоник самой низкой частоты должен быть одним и тем же для обеих переменных (рис. 3.20).

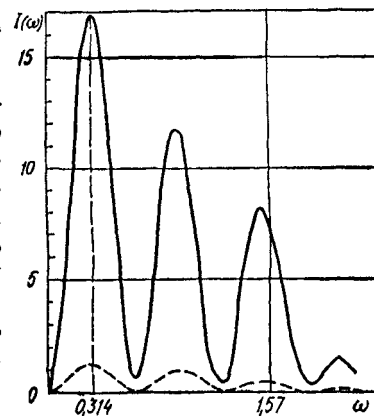
Далее находят фазу каждой из низкочастотных гармонических составляющих, пользуясь уравнениями регрессии вида:

$$y_t = a_0 + (a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t) = a_0 + A \sin(\omega t + \theta_i);$$

$$y_l = b_0 + (b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t) = b_0 + B \sin(\omega t + \theta_l);$$

$$\theta_i = \arctg a_1/a_2; \quad \theta_l = \arctg b_1/b_2;$$

Рис. 3.20. Спектрограмма $I(\omega)$ переменных u_1 и u_2 для определения низшей частоты ω



где ω — частота, отвечающая первому локальному максимуму, определяемая по формуле, указанной выше. Введем оценку критерия экзогенности $K_E = \theta_i - \theta_l$ для пары переменных. В динамических системах причина не может опережать следствие фазы, следовательно, если $K_E > 0$, то причиной является переменная y_i , а следствием y_l , если $K_E < 0$, то причиной является переменная y_l , а следствием y_i . Попарный анализ причин и следствий позволяет исключить из рассмотрения уравнения, где формально выходными переменными являются причины, а не следствия. Так, автономная система уравнений становится неавтономной, где число переменных больше числа знаков равенства.

Пример 33. Прогноз характеристик экономики Великобритании. По алгоритму МГУА, описанному в прим. 27, были получены модели экономической системы Великобритании. Исходные данные [24, 41], а также дополнительные, приведенные в табл. 33, включали 17 переменных. Из них ЭВМ выбрала по критериям эффективное множество выходных величин, состоящее из 6 переменных: x_2 — покупательная способность фунта; x_9 — индекс розничных цен; x_8 — средний заработок; x_{11} — импорт; x_{12} — текущий баланс; x_{13} — денежные запасы. В качестве входных управляющих переменных были указаны: x_4 — объем розничной торговли; x_6 — индекс промышленного производства; x_7 — вакансии; x_9 — оптовые цены на материалы; x_{14} — налоги на доходы; x_{15} — цены на нефть.* Число безработных x_1 выражается через указанные переменные с большой погрешностью, но все же приближенная модель и для него также получена [24, 41].

* Большое разнообразие уравнений, получаемых по алгоритмам МГУА, позволяет выбрать системы уравнений, содержащие меньшее число управляющих переменных, и даже автономную систему уравнений без управления (см прим. 27). Однако точность модели при этом ниже, а время упреждения прогноза меньше.

Для получения сценария статус-кво в алгоритме ОСА [41] были сделаны следующие изменения.

1. Общий вид полных полиномов был принят соответствующим конечноразностным уравнениям третьего порядка (т. е. учитывались три запаздывающих аргумента). Это необходимо для более точной аппроксимации изменения внешних возмущающих воздействий в зависимости от других переменных.

33. Дополнительная таблица данных экономики Великобритании

Год	Переменные					
	Отношение налоги на доходы комп- ний $u_1 = q_{13}$	Отношение налоги на ча- стных лиц/до- ходы частных лиц $u_2 = q_{11}$	Расходы пра- вительства $u_3 = q_{15}$	Цена на нефть $u_4 = q_{14}$	Время $T = q_{17}$	Индекс промыш- ленного производ- ства $x_{11} = q_4$
1964	0,128	0,153	11,29	35	1	86,1
1965	0,112	0,165	13,59	35	2	88,7
1966	0,125	0,171	14,45	35	3	90,2
1967	0,171	0,194	16,62	35	4	91,2
1968	0,159	0,186	18,29	37	5	97,0
1969	0,148	0,191	18,99	37	6	99,6
1970	0,175	0,195	20,87	37	7	99,7
1971	0,142	0,95	23,45	43,75	8	99,8
1972	0,124	0,184	26,33	44,75	9	102
1973	0,113	0,189	30,51	65,75	10	109,5
1974	0,156	0,203	39,15	200,5	11	105,1
1975	0,127	0,228	51,64	188,75	12	100,0
1976	0,095	0,230	58,37	200	13	102
1977	0,117	0,222	61,73	200	14	105,8
1978	0,151	0,21	71,34	200	15	109,7

2. Все переменные, участвующие в прогнозе, эндогенные и экзогенные (как системные эндогенные x_i , так и экзогенные внешние возмущения u_i) рассматривались как равноценные и были переобозначены буквой q_k ($k = 1, 17$):

$$x_1 = q_1; \quad x_{14} = q_5; \quad x_{23} = q_9; \quad u_1 = q_{13};$$

$$x_6 = q_2; \quad x_{17} = q_6; \quad x_{30} = q_{10}; \quad u_2 = q_{14};$$

$$x_8 = q_3; \quad x_{18} = q_7; \quad x_{81} = q_{11}; \quad u_3 = q_{15};$$

$$x_{11} = q_4; \quad x_{22} = q_8; \quad x_{82} = q_{12}; \quad u_4 = q_{10}; \quad T = q_{17}.$$

Для рассматриваемой в качестве примера экономической системы Великобритании получена следующая автономная система уравнений:

$$q_{1(0)} = x_{1(0)} = -8,895 + 2,522x_{8(0)} + 0,5526x_{14(0)} +$$

$$+ 0,2424x_{14(-1)} - 0,8026x_{22(0)} - 37,48u_{2(0)};$$

$$n_{\text{эм}}^{\text{г}} = 1,502 \cdot 10^{-4}; \quad I^2(K) = 5,874 \cdot 10^{-2};$$

$$q_{2(0)} = x_{6(0)} = -2,61 + 2,548x_{8(0)} + 3,072x_{8(-1)} + 2,457u_{1(0)} + 40,19u_{1(-1)} - 61,03u_{2(-1)};$$

$$n_{cm}^2 = 1,785 \cdot 10^{-4}; \quad I^2(K) = 2,351 \cdot 10^{-1};$$

$$q_{3(0)} = x_{8(0)} = 0,4487 - 0,555x_{8(-2)} + 0,02953x_{1(-1)} + 0,2508x_{6(0)} - 4,606u_{1(-1)} + 12,25u_{2(-3)};$$

$$n_{cm}^2 = 4,176 \cdot 10^{-4}; \quad I^2(K) = 5,838 \cdot 10^{-2};$$

$$q_{5(0)} = x_{14(0)} = -23,46 + 0,6499x_{1(-2)} - 0,5974x_{8(0)} + 3,024x_{8(-1)} - 48,1u_{1(0)} + 212,1u_{2(0)};$$

$$n_{cm}^2 = 3,188 \cdot 10^{-4}; \quad I^2(K) = 1,807;$$

$$q_{8(0)} = x_{22(0)} = -5,649 - 0,2675x_{6(0)} + 3,076x_{8(-1)} - 21,51u_{1(-2)} + 10,10u_{1(-3)} + 0,7315u_{2(-1)};$$

$$n_{cm}^2 = 2,193 \cdot 10^{-2}; \quad I^2(K) = 9,524 \cdot 10^{-2};$$

$$q_{13(0)} = u_{1(0)} = -0,002985 - 0,01754x_{1(0)} + 0,007519x_{1(-2)} + 0,0114x_{6(0)} + 0,8026u_{2(0)};$$

$$n_{cm}^2 = 4,035 \cdot 10^{-3}; \quad I^2(K) = 2,392 \cdot 10^{-3};$$

$$q_{14(0)} = u_{2(0)} = 0,2277 - 0,2067u_{2(-2)} - 7,175 \cdot 10^{-3}x_{1(-1)} + 5,175 \cdot 10^{-3}x_{6(-1)} + 8,571 \cdot 10^{-3}x_{8(-1)} + 1,546 \cdot 10^{-3}x_{22(0)};$$

$$n_{cm}^2 = 5,183 \cdot 10^{-3}; \quad I^2(K) = 7,394 \cdot 10^{-4}.$$

Кривые пошагового прогноза изменения переменных до 1981 г. показаны на рис. 3.21. При проверке прогноза по фактическим данным следует учесть, что на интервале прогноза ничего не было изменено в системе для ее улучшения.

Поиск границы разделения существенных переменных в модели экономики Великобритании на экзогенные и эндогенные.

Степень экзогенности каждой переменной CE_i оценивается величиной $CE_i = \sum_{l=1}^6 kE_{il}$, ($i = \overline{1,6}$).

Результаты анализа гармонического критерия экзогенности для рассматриваемого примера приведены в табл. 34. Как и ожидалось, наиболее экзогенными оказались переменные u_1 и u_2 . Вычеркивая соответствующие два

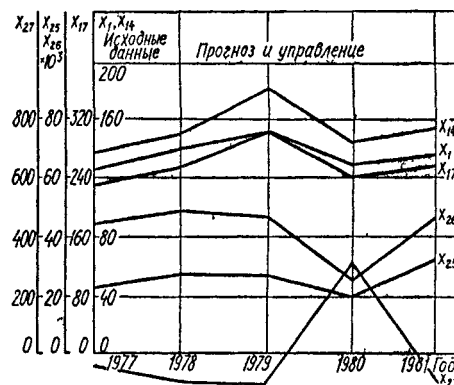


Рис. 3.21. Кривые пошагового прогноза изменения переменных до 1981 г. по сценарию статус-кво

разностных уравнения в автономной системе уравнений, находим искомую закономерность рассматриваемой экономической системы, при условии выполнения двух требований.

1. Для перебора машине среди других должны быть представлены модели-претенденты, построенные на «истинных» опорной функции и классе уравнений. В противном случае полученная система разностных уравнений является только оптимальной аппроксимацией искомой закономерности

34. Расчет степени экзогенности CE_i переменных модели экономики Великобритании

q_i	q_i							CE_i	Ранг по степени экзогенности
	x_1	x_6	x_8	x_{14}	x_{22}	u_1	u_2		
x_1	—	—	0,123	0,033	0,19	0,2	—0,097	0,0898	5
x_6	—	—	—0,036	—	—0,38	0,092	0,0066	0,00615	4
x_8	—0,123	0,036	—	—0,22	—0,05	0,83	—0,081	0,082	6
x_{14}	—0,033	—	0,22	—	—	1,04	0,3	0,3818	7
x_{22}	—0,19	0,38	0,05	—	—	—0,51	0,031	—0,0468	3
u_1	—0,2	—0,092	—0,83	—1,04	0,51	—	0,247	—0,234	1
u_2	0,097	—0,0066	0,082	—0,3	—0,031	—0,247	—	—0,0676	2

2. Исходные данные должны быть достаточно точными. Замечено, что с увеличением мощности помех алгоритм ОСА выбирает системы с все меньшим числом уравнений. Таким образом, физическая модель, отвечающая механизму объекта, может быть получена по критерию минимума смещения только при точных данных. При помехах алгоритм ОСА находит только самую оптимальную в заданных условиях аппроксимацию искомой закономерности.

Полученная в результате анализа степени экзогенности недоопределенная система уравнений (закономерность или оптимальная ее аппроксимация) может быть использована для построения других, интересующих нас сценариев краткосрочного нормативного прогноза.

3.5.7. МГУА — МЕТОД ПО ПРИНЦИПУ НЕВОДА

Примеры, приведенные выше, являются первыми попытками применения алгоритма ОСА, основанного на принципах самоорганизации, и МГУА для исследования конкретных систем в реально существующих условиях.

При постановке работы предполагалось, что данные, накопленные экологами или экономистами, достаточно представительны как по составу наблюдаемых переменных, так и по частоте и выбору места измерений. Именно это доверие к профессиональной интуиции, опыту и практике специалистов решило дилемму: ничего не делать или использовать то, что уже имеется, — в пользу последнего. Таким образом, исходное множество переменных выбрано по возможности большим, чтобы ЭВМ могла указать то, что можно выбрать вообще. При оценке исходных данных следует учитывать, что МГУА является помехоустойчивым методом: помехи могут в несколько раз превышать сигнал (разд. 2.6.4).

В основу самоорганизации, т. е. перебора многих моделей-претендентов по целесообразно выбранным внешним критериям, положено основное требование: все отобранные модели должны быть непротиворечивыми, т. е. наилучшим образом соответствовать различным частям таблицы исходных данных (части *A* и *B*). Учет новых точек не должен существенно изменять модели ни по структуре, ни по оценкам коэффициентов. Дополнительно требовалось для уменьшения объема перебора и повышения помехоустойчивости, чтобы модели не давали «диких» краткосрочных прогнозов. Такие модели из перебора исключались еще до его начала по критерию непротиворечивости.

Оказывается, что требование непротиворечивости (выражаемое системным критерием несмещенности) позволяет ЭВМ выбрать и предложить на окончательный суд экспертов целый ряд непротиворечивых моделей в виде систем разностных уравнений, учитывающих заданное число запаздывающих значений аргументов.

Если кто-либо из экспертов, исходя из своих представлений, сам может предположить имитационную модель данной экологической системы, связывающую переменные, имеющиеся в таблице исходных данных, то его модель при принятом числе запаздываний обязательно должна присутствовать во множестве моделей, отобранных машиной, потому что модель принадлежит к выделяемому множеству всех возможных (при указанных условиях) непротиворечивых моделей. Более того, если эксперт забыл или сознательно выбросил какое-то слагаемое в уравнении, то машина поправит модель. Имитационный метод полезен для составления списка исходных переменных, предлагаемых ЭВМ.

При этом модельеру, изобретающему имитационную модель, придется многому научиться у машины. Во-первых, в моделях некоторые аргументы можно заменить другими, достаточно тесно связанными с ними. Например, если концентрация цинка действует на выходную переменную так же, как и концентрация марганца (допустим!), то машина не сможет их различить и выберет в модель ту переменную, которая измерена более точно. Более того, если из двух синфазно или противофазно изменяющихся аргументов только один входит в неко-

торый физический закон, то машина может выбрать для более точного выражения зависимости аргумент, не участвующий в данном физическом законе. Чем дольше наблюдается процесс, тем меньше вероятность ложной корреляции. Таким образом, машинные модели почти всегда являются нефизическими моделями, отражающими механизм моделируемого объекта. Это не значит, что не существует метода самоорганизации именно физической модели по специальным критериям. Функции связанных между собой переменных можно различать по критерию сохранения знака сдвига фазы колебаний выходной величины (критерий экзогенности, разд. 3.5.8).

Во-вторых, легко обнаруживается, что человек не может соревноваться с ЭВМ в получении нефизических моделей. Его удел — избрание только физических моделей. Согласно строго доказанной второй теореме Шеннона (из теории связи), для долгосрочного прогноза нужны именно нефизические модели, тем более отклоняющиеся от физических в сторону упрощения, чем больше помехи измерений и чем больше нарушен информационный базис модели (множество аргументов физической модели).

В-третьих, оказывается, что нефизические модели с неполным информационным базисом или с излишними (по физическим характеристикам процесса) переменными дают достаточную точность. Например, улов рыбы (зависящий более чем от 20 существенных переменных) удастся определить и прогнозировать с точностью до 15 % по нефизической модели, имеющей всего два-три аргумента, отобранных ЭВМ. Аналогичным образом поступает и эксперт-ихтиолог. Оказывается, что двойной счет времени (например, в сезонах и годах одновременно) и использование «совсем не тех» опорных функций часто повышает точность прогноза.

Имитационное моделирование с его сравнительно простыми рассуждениями и точным разграничением зависимых и независимых переменных (например, солнце определяет продукцию органического вещества, которое потребляется фитопланктоном, являющимся пищей зоопланктона, зоопланктон — пищей рыбы и т. п.) уже не может удовлетворять исследователей, потому что модели пригодны для решения сравнительно простых вопросов, которые ясны специалистам и без математического моделирования, и для долгосрочного прогноза принципиально неприменимы. В то же время самоорганизация дает, как в неводе рыбака, все модели, которые можно получить из заданной таблицы данных по условию непротиворечивости, т. е. как все тривиальные, так и все имитационные, а часто и новые неожиданные закономерности, которые могут оказаться полезными или в познавательном смысле, или для прогноза, что определяется выбором критериев селекции модели. При малых помехах и при использовании симметричных (помехоустойчивых) критериев минимума смещения и экзогенности самоорганизация дает физические модели с легко интерпретируемыми коэффициентами.

3.6. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНО- И ДВУХМЕРНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

3.6.1. САМООРГАНИЗАЦИЯ БЕЗРАЗМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТРЕНДА НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Рассматривается задача долгосрочного количественного прогноза детерминированных процессов при наличии сравнительно небольших помех (шума), влияние которых можно уменьшить при помощи скользящего сглаживания данных (или спектральных и корреляционных характеристик): $q_0 = (q_{-1} + q_0 + q_{+1})/k$, где $k = 3$. Существенное уменьшение времени счета достигается в случае, когда при самоорганизации моделей ЭВМ предоставляется возможность самой выбрать шаг и число учитываемых запаздывающих аргументов. Так, при прогнозе ширины годовых колец сибирского кедра получилось, что оптимальный шаг отсчета времени равен четырем годам, а число учитываемых запаздываний равно десяти, т. е. при моделировании нужно учитывать ширину десяти колец за 40 последних лет наблюдения кедра (рис. 2.3).

Успех решения задачи долгосрочного количественного прогноза ширины колец сибирского кедра по обобщенному (мультипликативно-аддитивному) алгоритму МГУА объясняется не только тем, что машине был предоставлен более широкий, чем обычно, выбор опорных функций, но и прежде всего тем, что был найден (при помощи построения ранговой корреляционной функции) оптимальный шаг дискретизации. При построении функции спектральной интенсивности (при указанном небольшом скользящем ее сглаживании) или ранговой корреляционной функции (при объединении от 3 до 10 точек в один уровень) можно достаточно четко определить основные частоты процесса. Кроме того, их можно найти при помощи быстрого преобразования Фурье или непосредственно построением (по точкам) кривой остаточной дисперсии.

Труднее определить постоянные времени экспоненциальных составляющих процесса. Здесь пока что можно рекомендовать только обычный метод наименьших квадратов, причем оценки коэффициентов определяются одновременно для наибольшего числа экспонент, которые только допускает длина таблицы наблюдения процесса.

Если частоты (для колебательных процессов) или постоянные времени (для монотонных процессов) найдены, то можно определить шаг дискретизации, число учитываемых запаздывающих аргументов (форму шаблона), структуру и оценки коэффициентов прогнозирующих моделей (вместо оценки по методу наименьших квадратов). Кроме того, можно выявить так называемые частотные или фазовые инварианты,

необходимые для доопределения (окончательного выбора) лучшего долгосрочного прогноза среди нескольких прогнозов, отобранных предварительно по обычным критериям МГУА (на плоскости $n_{см} - I^2(K)$) при ограничении $\Delta^2(C) \leq 1$.

Инвариантом (по отношению к времени упреждения прогноза) следует называть разнообразную достаточно достоверную априорную информацию о решениях системы дифференциальных уравнений, используемой для прогноза, которая не учитывалась при составлении уравнений. Инвариантом может быть соотношение координат, постоянных времени, частот, фазовых сдвигов колебаний основных перемен-

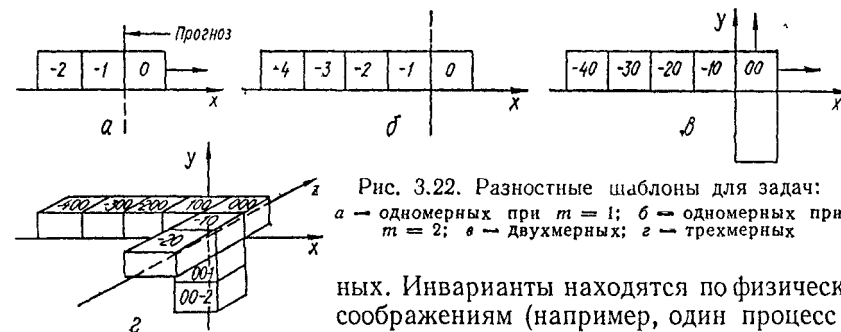


Рис. 3.22. Разностные шаблоны для задач: а — одномерных при $m = 1$; б — одномерных при $m = 2$; в — двухмерных; г — трехмерных

ных. Инварианты находятся по физическим соображениям (например, один процесс не может опережать другой заданный процесс и т. п.) или определяются по данным на интервале наблюдения. При долгосрочном прогнозе требуется, чтобы они выполнялись и на интервале прогноза.

Если инвариант найден, то двухуровневые алгоритмы (баланс годовых и сезонных прогнозов) уже не требуются. Можно вести прогнозирование по одноуровневым алгоритмам при одной степени детализации языка моделирования.

Безразмерные разностные модели. Рассмотрим безразмерные разностные уравнения, пошаговое интегрирование которых эквивалентно выделению гармоник тренда.

Одночастотный процесс $m = 1$. Характеристическое уравнение $L^2 + \omega_0^2 = 0$. Корни $L_1 = +j\omega$ и $L_2 = -j\omega$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

при помощи выбора масштаба измерения времени $T = \omega_0 t$ приводится к безразмерному виду (при $\Delta T = 1/\omega_0$)

$$d^2 q/dT^2 + q = 0.$$

Аналог

$$q_0 - 2q_{-1} + q_{-2} + q_0 = 0.$$

Прогнозирующая модель

$$q_0 = q_{-1} - q_{-2}/2.$$

Шаблон для пошагового прогноза показан на рис. 3.22. Практически полученная формула означает, что вместо оценки коэффициентов по методу наименьших квадратов расчету подлежит новый шаг отсчета времени. По экспериментальным данным находится частота ω_0 при помощи построения функции спектральной интенсивности $I(\omega)$ или ранговой корреляционной функции. Шаг отсчета времени принимается равным $\Delta T = 1/\omega_0$. Соответственно ордината q_0 отсчитывается в точке, где $t = T = 0$, ордината q_{-1} — на один шаг назад, а ордината q_{-2} — на два шага запаздывания (рис. 3.23).

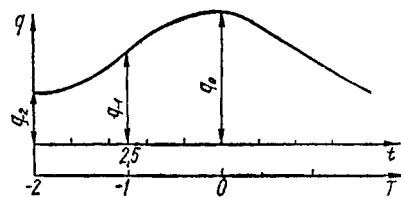


Рис. 3.23. К пояснению отсчета запаздывающих ординат

Двухчастотный процесс $m = 2$. Характеристическое уравнение $L^4 + (L_1 + L_2)L^2 + L_1L_2 = 0$. Корни $L_1 = +j\omega_1$; $L_2 = -j\omega_1$; $L_3 = +j\omega_2$; $L_4 = -j\omega_2$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний:

$$\frac{d^4 q}{dt^4} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_1^2 \omega_2^2 q = 0.$$

Введя безразмерный масштаб времени

$$T = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \sqrt[4]{\omega_1^2 \omega_2^2},$$

получим

$$\frac{d^4 q}{dT^4} + A \frac{d^2 q}{dT^2} + q = 0,$$

где

$$A = [(\omega_1^2 + \omega_2^2)/(\omega_1 \omega_2)].$$

Дифференциальный аналог уравнения при $\Delta T = 1/\omega_0$

$$(q_0 - 4q_{-1} + 6q_{-2} - 4q_{-3} + q_{-4}) + (q_0 - 2q_{-1} + q_{-2})A + q_0 = 0.$$

Прогнозирующая модель

$$q_0 = (4 + 2A)q_{-1}/(2 + A) - (6 + A)q_{-2}/(2 + A) + 4q_{-3}/(2 + A) - q_{-4}/(2 + A).$$

Шаблон для пошагового прогноза показан на рис. 3.22, в. Для оценки коэффициента A находятся частоты ω_1, ω_2 , а шаг отсчета запаздывающих аргументов изменяется в $1/\omega_0$ раз.

Аналогичным образом находятся прогнозирующие модели для многочастотных процессов и определяются оценки их коэффициентов. Например, для трехчастотного процесса масштаб времени $\omega_0 = \sqrt[6]{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}$ и т. д. При увеличении числа учитываемых частот на единицу число запаздывающих аргументов увеличивается на две единицы (шаблон удлиняется на две клетки).

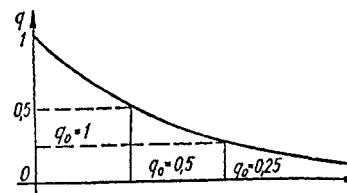


Рис. 3.24. К пояснению отсчета запаздывающей ординаты экспоненциального процесса (шаг равен времени полураспада)

Одноэкспоненциальный процесс. Характеристическое уравнение $L + 1/\tau = 0$. Корень $L = -1/\tau$. Дифференциальное уравнение $dq/dt + q/\tau = 0$. Выберем масштаб отсчета времени $T = \omega_0 t$, где $\omega_0 = 1/\tau$. Дискретный аналог дифференциального уравнения при $\Delta T = 1/\omega_0$ ($q_0 - q_{-1} + q_0 = 0$). Прогнозирующая формула $q_0 = q_{-1}/2$ (шаблон для пошагового прогноза показан на рис. 3.22) означает, что если процесс описывается указанным выше уравнением, то при определенном выборе шага отсчета времени ΔT каждая последующая ордината равна половине предыдущей (рис. 3.24).

Двухэкспоненциальный процесс. Характеристическое уравнение $L^2 + (1/\tau_1 + 1/\tau_2)L + 1/\tau_1 1/\tau_2 = 0$. Корни $L_1 = -1/\tau_1$; $L_2 = -1/\tau_2$. Дифференциальное уравнение

$$d^2 q/dt^2 + (1/\tau_1 + 1/\tau_2) \frac{dq}{dt} + q/(\tau_1 \tau_2) = 0.$$

Безразмерный масштаб отсчета времени

$$\omega_0 = \sqrt{1/\tau_1 \tau_2}; \quad T = \omega_0 t.$$

Дифференциальное уравнение при безразмерном времени

$$\frac{d^2 q}{dT^2} + A \frac{dq}{dT} + q = 0, \quad \text{где} \quad A = \left(\frac{1/\tau_1 + 1/\tau_2}{\sqrt{1/\tau_1 \tau_2}} \right).$$

Дискретный аналог (при $\Delta T = 1/\omega_0$)

$$(q_0 - 2q_{-1} + q_{-2}) + A(q_0 - q_{-1}) = 0.$$

Прогнозирующая модель:

$$q_0 = (2 + A)q_{-1}/(1 + A) - q_{-2}/(1 + A).$$

Аналогичным образом получают прогнозирующие модели для многоэкспоненциальных процессов. Например, для процесса, выражающегося суммой трех экспонент:

$$\omega_0 = \sqrt[3]{1/\tau_1 \tau_2 \tau_3}.$$

Безразмерные параметры

$$A = (1/\tau_1 + 1/\tau_2 + 1/\tau_3)/\sqrt[3]{1/(\tau_1 \tau_2 \tau_3)} \quad \text{и}$$

$$B = (1/(\tau_1 \tau_2) + 1/(\tau_2 \tau_3) + 1/(\tau_1 \tau_3))/\sqrt[3]{(1/\tau_1 \tau_2 \tau_3)^2}.$$

Процесс, выражающийся суммой экспоненты и гармоники (без затухания). Корни характеристического уравнения

$$L^3 + a_1 L^2 + a_2 L + a_3 = 0$$

в этом случае $L_1 = -1/\tau_1$; $L_2 = +j\omega$, $L_3 = -j\omega$.

По формулам Виетта

$$a_1 = L_1 + L_2 + L_3 = 1/\tau; \quad a_2 = L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_1 L_3 = \omega; \quad a_3 = \omega_1^2/\tau_1.$$

Дифференциальное уравнение имеет следующий вид

$$\frac{d^3 q}{dt^3} + \frac{1}{\tau_1} \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_1^2 \frac{dq}{dt} + \frac{\omega^2}{\tau_1} q = 0.$$

Безразмерный масштаб времени $T = \omega_0 t$, где $\omega = \sqrt[3]{\omega^2/\tau}$. Дифференциальное уравнение при новом (безразмерном) масштабе времени

$$\frac{d^3 q}{dT^3} + A \frac{d^2 q}{dT^2} + B \frac{dq}{dT} + q = 0,$$

где

$$A = \sqrt[3]{\frac{\omega^2}{\tau}} \tau; \quad B = \omega^2 / \sqrt[3]{(\omega^2/\tau)^2}.$$

Дискретный аналог

$$(q_0 - 3q_{-1} + 3q_{-2} - q_{-3}) + A(q_0 - 2q_{-1} - q_{-2}) + B(q_0 - q_{-1}) + q_0 = 0.$$

Прогнозирующая модель (при $\Delta T = 1/\omega_0$)

$$q_0 = (3 + 2A + B)q_{-1}/(2 + A + B) - (3 - A)q_{-2}/(2 + A + B) + q_{-3}/(2 + A + B).$$

Двухмерные задачи экстраполяции (моделирование полей). Свободное двумерное поле описывается уравнением Фика

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \omega_0 q = 0.$$

Выберем масштаб измерения осей поля x и y одинаковым и равным $X = \omega_0 x$, $Y = \omega_0 y$. Уравнение приводится к безразмерному виду (при $\Delta X = \Delta Y = 1/\omega_0$)

$$\frac{\partial^2 q}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial Y^2} + q = 0.$$

Аналог

$$(q_{00} - 2q_{-10} + q_{-20}) + (q_{00} - 2q_{0-1} + q_{0-2}) + q_{00} = 0.$$

Прогнозирующая модель

$$q_{00} = \frac{2}{3}(q_{-1,0} + q_{0,-1}) - \frac{1}{3}(q_{-2,0} + q_{0,-2}).$$

Шаблон для пошагового прогноза показан на рис. 3.22, г. Особенность двух- и трехмерных алгоритмов МГУА состоит в том, что перебору по внешним критериям подлежат полиномы, получаемые при постепенном увеличении числа гармоник на число m — по оси x ; n — по оси y и k — по оси z (одна из осей может быть осью времени t):

$$m = 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3$$

$$n = 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3$$

$$k = 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3$$

Многофакторные задачи. Рассмотрим решение многофакторной задачи на примере модели «загрязняющие вещества» из системы моделей Азовского моря, получившей в 1983 г. Государственную премию [17]. Дифференциальное уравнение диффузии загрязняющих веществ

$$K_x \frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 q_i}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 q_i}{\partial z^2} + a_0 q_i + a_1 \Phi + a_2 t + a_3 O_2 = 0,$$

где $K = K_x = K_y = K_z$ — коэффициенты турбулентной диффузии; q_i — концентрация загрязняющего вещества; Φ — биомасса фито-планктона; t — температура воды; O_2 — содержание кислорода в воде.

Выберем масштаб измерения осей

$$X = \omega_0 x; \quad Y = \omega_0 y; \quad Z = \omega_0 z, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{a_0}{K}.$$

Уравнение приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 q_i}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 q_i}{\partial Z^2} + q_i + \left(\frac{a_1}{K\omega_0^2}\right)\Phi + \left(\frac{a_2}{K\omega_0^2}\right)t + \left(\frac{a_3}{K\omega_0^2}\right)O_2 = 0$$

Аналог

$$(q_{000} - 2q_{-100} + q_{-200}) + (q_{000} - 2q_{0-10} + q_{0-20}) + (q_{000} - 2q_{00-1} + q_{00-2}) + q_{000} + a_1 \Phi_{000}/(K\omega_0^2) + a_2 t_{000}/(K\omega_0^2) + a_3 O_{200}/(K\omega_0^2) = 0.$$

Прогнозирующая модель

$$q_{000} = \frac{1}{2}(q_{-100} + q_{0-10} + q_{00-1}) - \frac{1}{4}(q_{-200} + q_{0-20} + q_{00-2}) - \frac{1}{4}[a_1 \Phi_{000}/(K\omega_0^2) + a_2 t_{000}/(K\omega_0^2) + a_3 O_{200}/(K\omega_0^2)].$$

Оценки коэффициентов $a_1/(K\omega_0^2)$, $a_2/(K\omega_0^2)$ и $a_3/(K\omega_0^2)$ находятся по методу наименьших квадратов. При учете нескольких факторов приходится оценки части коэффициентов не рассчитывать по частотам, как в однофакторных задачах, а определять по методу наименьших квадратов. Малое число определяемых оценок увеличивает достоверность их определения и упрощает вычисления.

Для безразмерных гармонико-экспоненциальных моделей исходные данные должны быть измерены с шагом $1/\omega_0$. Удовлетворить это требование можно при моделировании процессов или физических полей, представленных в виде непрерывной осциллограммы или карты. При моделировании одномерных процессов, заданных дискретно, приходится аппроксимировать исходные данные при помощи сплайнов, для того чтобы получить новые дискретные данные с требуемым шагом.

Если дискретизация данных с шагом $1/\omega_0$ почему-либо не применяется, то все же безразмерные модели показывают, сколько и какие

именно запаздывающие аргументы рекомендуется применить в моделях обычного типа (с определением оценок коэффициентов по методу наименьших квадратов).

Основной результат состоит в выборе числа запаздывающих аргументов и шага дискретизации осей.

Пример 34. Определение множества запаздывающих аргументов для разностных моделей экосистемы оз. Байкал. Спектральный анализ и сравнение амплитуд гармонических составляющих показали, что процесс изменения показателя солнечной активности (число Вольфа) и процессы в водной экосистеме оз. Байкал следует рассматривать как трехчастотные с тремя основными солнечными гармониками, периоды которых (на интервале наблюдения 1970—1978 гг.): $T_1 = 11,2$ года; $T_2 = 5,6$ года; $T_3 = 3,7$ года (частоты $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 0,561$ год $^{-1}$; $\omega_2 = 2\pi/T_2 = 1,120$ год $^{-1}$ и $\omega_3 = 2\pi/T_3 = 1,698$ год $^{-1}$). Для трехчастотных процессов рекомендуется учитывать всего четыре запаздывающих аргумента, а шаг дискретизации оси времени выбирать с масштабом $T = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = 1,1390$ год $^{-1}$. Следовательно, один шаг по оси безразмерного отсчета времени должен содержать $1/\omega_0 = 0,9791$ лет. Так как в таблице наблюдений заданы значения переменных только с шагом дискретизации, равным одному году, то четыре запаздывания по оси обычного отсчета времени

$$q_{-0,98}; q_{-1,96}; q_{-2,95}; q_{-3,93}$$

лучше всего передадут ближайшие к ним запаздывающие аргументы $q_{-1}, q_{-2}, q_{-3}, q_{-4}$, взятые из таблицы данных. В полных полиномах следует предложить ЭВМ учитывать четыре найденных таким образом запаздывающих аргумента для всех участвующих в модели переменных. Алгоритм МГУА оставит из них наиболее существенные или использует все четыре.

Более эффективным метод оказывается при низких частотах. Так, если было бы $T_1 = 40$ лет; $T_2 = 10$ лет ($\omega_1 = 2\pi/T_1 = 0,157$ год $^{-1}$; $\omega_2 = 2\pi/T_2 = 0,628$ год $^{-1}$); $T = \omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{0,157^2 + 0,628^2} = \sqrt{0,128} = 0,314$ год $^{-1}$, то один шаг оси T должен содержать $1/\omega_0 = 1/0,314 = 3,18$ лет или запаздывающие аргументы

$$q_{-3,18}; q_{-6,36}; q_{-9,54}; q_{-12,72}$$

Ближайшие ординаты в таблице данных $q_{-3}; q_{-6}; q_{-10}; q_{-13}$. Таким образом, априори известно, какие запаздывающие аргументы нужно предлагать для перебора ЭВМ. Вычисления упрощаются. Рассмотренные выше безразмерные модели используются для прогнозирования (экстраполяции) трендов регулярной составляющей процессов и полей. Небольшой остаток, удовлетворяющий критерию стационарности, прогнозируется при помощи пошагового интегрирования системы разностных уравнений. Общий прогноз равен сумме прогнозов тренда и остатка.

3.6.2. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВУХМЕРНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПОЛЕЙ

Шаблон исходного поля данных разбивается на элементарные квадраты, в каждом из которых, кроме квадратов области прогноза или экстраполяции, указывается среднее значение переменной. Сдвиг шаблона поля вдоль осей x и y позволяет составить для каждого

положения шаблона уравнение, связывающее значение корреляционной функции со значениями переменной. Таким образом можно построить двумерный холм корреляционной функции:

$$R_{\tau_x \tau_y} = \frac{1}{4N_x N_y} \sum_{-N_x}^{N_x} \sum_{-N_y}^{N_y} f(xy) f[(x - \tau_x)(y - \tau_y)].$$

Предельно допустимый сдвиг шаблонов соответствует четверти общего количества произведений (рис. 3.25). При таком сдвиге получим уравнение вида

$$R(\tau_x=4, \tau_y=4) = \frac{1}{16} [q_{-30}q_{-7-4} + q_{-20}q_{-6-4} + q_{-10}q_{-5-4} + q_{00}q_{-4-4} + \\ + q_{-3-1}q_{-7-5} + q_{-2-1}q_{-6-5} + q_{-1-1}q_{-5-5} + q_{0-1}q_{-4-5} + q_{-3-2}q_{-7-6} + \\ + q_{-2-2}q_{-6-6} + q_{-1-2}q_{-5-6} + q_{0-2}q_{-4-6} + q_{-3-3}q_{-7-7} + q_{-2-3}q_{-6-7} + \\ + q_{-1-3}q_{-5-7} + q_{0-3}q_{-4-7}].$$

Всего по двумерной корреляционной функции при разных сдвигах получится $(8 \times 8) - (4 \times 4) = 48$ подобных уравнений. Допустим, что требуется определить значения переменной в восьми квадратах

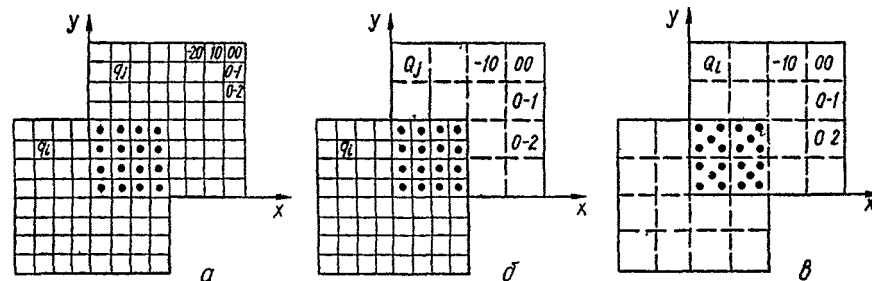


Рис. 3.25. Двухмерная корреляционная функция $K_{q_i q_j}$; q_i — усредненные значения переменной

($m = 8$): $q_1 q_2 q_3 \dots q_8$, тогда, дифференцируя квадрат суммы невязок уравнений, получаем систему нормальных уравнений:

$$\Delta_{\Sigma}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_8^2; \quad \frac{\partial \Delta_{\Sigma}^2}{\partial q_1} = 0; \\ \frac{\partial \Delta_{\Sigma}^2}{\partial q_2} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \Delta_{\Sigma}^2}{\partial q_8} = 0.$$

Искомые величины получаются в результате применения соответствующих кубических или линейных уравнений, условно называемых

корреляционными моделями стандартной структуры Указание множества прогнозируемых величин $q_1 q_2 \dots q_8$ ($m = 8$) отвечает одному шагу прогноза. Вычисляя этот шаг, назначают новое прогнозируемое множество ординат, новый шаг прогноза и т. п.

Экстраполяция многофакторных полей. Преимущество обратного преобразования на основе корреляционных функций по сравнению с гармоническим алгоритмом МГУА заключается в возможности просто решать многофакторные задачи. Например, если в каждой клетке шаблона указаны две переменные (выходная q и ее фактор v), то указанное выше уравнение будет содержать в правой части $3 \times 16 = 48$ слагаемых вида $q_i q_j$, $q_i v_j$ и $v_i v_j$, соответствующих двум корреляционным и одной взаимокорреляционной функциям: $R_{q_i q_j}$, $K_{q_i v_j}$, $K_{v_i v_j}$. В остальном алгоритм не изменяется. Дифференцируя сумму квадратов невязки

$$\partial \Delta_{\Sigma}^2 / \partial q_{np} = 0,$$

получаем усредненную (в среднеквадратичном смысле) оценку экстраполяции q_{np} . Кубическое уравнение получается, если среди слагаемых присутствует невязка выражения коэффициента корреляции. Если она отсутствует, то получается линейное уравнение. Разнообразие многомерных авто- и взаимокорреляционных функций (рис. 3.25) и множество их ординат позволяют получить соответствующее разнообразие корреляционных моделей стандартной структуры. Эти модели можно подвергнуть селекции по внешним критериям, если применить все известные алгоритмы МГУА (однорядные и многорядные). Перебору по внешним критериям подлежат также всевозможные суммы квадратов невязок, использованные для получения корреляционных моделей.

Рассмотрим примеры основных алгоритмов МГУА, в которых вместо обычных переменных селекции подвергаются корреляционные модели или соответствующие им невязки.

Многорядный алгоритм МГУА, использующий корреляционные модели стандартной структуры. Рассмотрим первый ряд селекции. Вначале образуются частные описания в виде систем уравнений, учитывающих выходную величину y и ее два аргумента x_i и x_j :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{yx_i}(\tau) = \sum_k y_k x_{i,k-\tau} / N(\tau), \quad \tau \geq 0; \\ R_{yx_j}(\tau) = \sum_k y_k x_{j,k-\tau} / N(\tau); \\ R_{x_i x_j}(\tau) = \sum_k x_{i,k} x_{j,k-\tau} / N(\tau); \\ R_{x_j x_i}(\tau) = \sum_k x_{j,k} x_{i,k-\tau} / N(\tau); \\ R_{yy}(\tau) = \sum_k y_k y_{k-\tau} / N(\tau). \end{array} \right.$$

Таких частных описаний можно составить C_n^2 для каждого значения сдвига τ .

Значения $R_{x_i y}(\tau)$ и $R_{yy}(\tau)$ находятся при помощи усреднения по нескольким интервалам ряда наблюдений длиной $N(\tau)$. Величины y при этом приравниваются выходной величине q , как и в обычном полиномиальном алгоритме.

Величины y_i рассчитываются по найденной таким образом корреляционной модели. В качестве вектора y берутся такие значения, которые наилучшим образом удовлетворяют системе уравнений ординат корреляционной функции, т. е. минимизируют сумму квадратов невязок этой системы: $\Delta_{\Sigma}^2 = \sum \Delta_i^2 \rightarrow \min$. Оптимальный вектор y является решением нелинейной системы нормальных уравнений вида

$$\partial \Delta_{\Sigma}^2 / \partial y_i = 0.$$

Вычисление вектора y позволяет расширить таблицу исходных данных. Число столбцов таблицы увеличивается на F_1 , где F_1 — свобода выбора; $F_1 < C_n^2$. Далее алгоритм не отличается от описанного выше. Отметим, что описанные алгоритмы позволяют находить не только прогноз, но и аппроксимацию ряда наблюдений. Алгоритмы могут работать с вычислением остатков и без этой операции, как все многорядные алгоритмы МГУА.

Однородный (комбинаторный) алгоритм. Полный полином представляет собой сумму квадратов всех невязок:

$$\Delta_{\Sigma}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2.$$

Оцениваются на плоскости двух критериев все суммы, которые можно получить вычеркиванием из полной суммы тех или иных невязок. Число частных сумм 2^n . Таким образом находится одна, лучшая по критериям, модель.

Многоэтапный алгоритм. На первом этапе перебирают на плоскости двух критериев все невязки по одной:

$$\Delta_{\Sigma}^2 = \Delta_i^2.$$

Выбирают несколько F_1 лучших невязок и соответственно моделей. На втором этапе к ним прибавляют по одной остальные невязки:

$$\Delta_{\Sigma}^2 = \Delta_i^2 + \Delta_j^2$$

и снова выбирают несколько F_2 лучших сумм по две невязки. Усложнение суммы прекращается, как только увеличение числа слагаемых невязок не улучшает критерий. В отличие от многорядного алгоритма, который может продолжаться бесконечно, многоэтапная процедура заканчивается, как только будет учтена последняя невязка.

Глава 4

САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

4.1. ЗАДАЧА ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

4.1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с изложенным в гл. 1 деление на кратко-, средне- и долгосрочный прогнозы предполагает наличие характеристической величины, в достаточной степени отражающей динамические свойства исследуемых процессов и соответствующей им системы. В качестве такой характеристической величины может выступать интервал корреляции T_k . Для простоты интервал упреждения прогноза будет сравниваться с величиной интервала корреляции, который будем считать мерой интервала долгосрочного прогноза. Прогнозы со временем упреждения, превышающим $0,2T_k$, условно называются среднесрочными, а при времени упреждения, равном T_k и более, — долгосрочными.

4.1.2. ОСОБЕННОСТИ ДОЛГОСРОЧНОГО КОЛИЧЕСТВЕННОГО ПРОГНОЗА

Долгосрочные и сверхдолгосрочные прогнозы возможны только в случае, если удастся выделить детерминированную часть процесса (тренд), например в виде суммы нескольких гармоник. Тогда разностные уравнения, получаемые по МГУА, используются для прогноза флюктуационной составляющей или остатка. При этом прогноз равен сумме тренда и остатка: $X(t) = Q(t) + x(t)$; тренд равен сумме среднего и всех существенных частот и экспонент. Остаток — стационарный случайный процесс, который уже нельзя выразить гармоническим рядом. Лучшие описания остатка:

- а) система разностных уравнений;
- б) корреляционная модель стандартной структуры. Пошаговый прогноз остатка, после времени упреждения, равного времени корреляции, либо затухает до нуля, либо не затухает, но все равно уже не отвечает фактическому изменению остатка. Фаза колебаний теряется. Незатухающий пошаговый прогноз остатка можно получить, если описать его системой разностных уравнений (линейных или нелинейных, как в задаче «хищник — жертва») при определенной структуре и значении коэффициентов. После интервала, равного времени корреляции, лучшим долгосрочным прогнозом является прогноз по тренду (для циклических процессов — прогноз по календарному среднему), без учета остатка.

В пределах времени корреляции незатухающий прогноз остатка может быть более точным, чем затухающий. В этом случае с помощью алгоритма ОСА выбирают для описания остатка соответствующую систему разностных уравнений. Время корреляции и существенные частоты можно найти при помощи построения ранговой корреляционной функции процесса. Достоверность долгосрочного количественного прогноза увеличивается в связи с применением *интервального прогноза* в форме прогноза уровней или рангов. Прогнозируемая величина делится на ряд уровней (с учетом требований теоремы Уидроу) и в прогнозе указывается последовательность их смены во времени. Чем меньше уровней, тем больше время упреждения прогноза. Критерий баланса двух прогнозов, отличающихся по числу уровней, позволяет поднять время упреждения более детального прогноза до времени упреждения самого грубого прогноза (с разделением величины всего на два уровня).

4.1.3. ВРЕМЯ УПРЕЖДЕНИЯ ОДНОУРОВНЕВОГО ПРОГНОЗА

Для математических моделей, основанных на рассмотренных в гл. 3 подходах, всегда существует предел предсказуемости [12, 33]. Этот предел $n_o \leq n_g$ соответствует концу интервала прогнозирования, для которого еще справедливо неравенство $\Delta_1^2(C) < 1$, а для $n_o > n_g$ справедливо неравенство $\Delta_1^2(C) \geq 1$, где критерий точности прогноза

$$\Delta_1^2(C) = \sum_{i \in N_o} (y_i^M - y_i)^2 / \sum_{i \in N_o} (y_i - \bar{y})^2.$$

Прогнозы с $\Delta_1^2(C) < 1$ удовлетворяют требованию точности прогноза.

Предел предсказуемости зависит не только от уровня шума и объема выборки, но и от таких свойств модели, как детализация математиче-

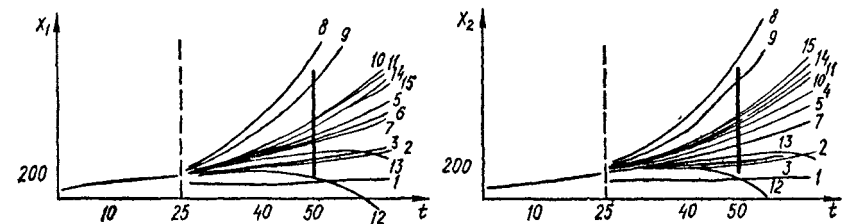


Рис. 4.1. Веер трендов

ского языка описания. Суточный прогноз погоды с помощью дифференциальных уравнений имеет предсказуемость не более 15 сут, однако при этом практически достижимым пределом является прогноз только на 5—7 сут [12]. К аналогичным высказываниям приходят и гидробиологи. Теоретически можно показать, что пошаговый прогноз на основе разностных уравнений с одномерным отсчетом времени (при

усреднении всех текущих значений с одинаковым интервалом квантования) ввиду конечной памяти динамической системы стремится к установившемуся решению, т. е. сходится к прямой или какому-либо другому установившемуся решению (тренду) разностного уравнения. При прогнозах погоды такой временный ход тренда называют климатическим средним (см. рис. 4.7).

Для всех физических моделей с ростом интервала упреждения прогноза неточность прогноза возрастает. Погрешности данных, помехи, недостаточная адекватность модели и реальных процессов и т. д. оказывают все возрастающее влияние. В результате моделирования получается веер трендов (рис. 4.1). Это явление можно объяснить как положительную энтропию решений, полученных при помощи модели. Как и в термодинамике, энтропия прогноза возрастает с ростом интервала упреждения прогноза [12].

4.2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПО ИНВАРИАНТУ И КРИТЕРИЮ БАЛАНСА

4.2.1. ИНТЕРВАЛ КОРРЕЛЯЦИИ КАК МЕРА СТЕПЕНИ РАЗМЫТОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЯЗЫКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математический аппарат (или язык) моделирования может быть весьма разнообразным. При этом существенный интерес представляет вопрос о влиянии степени детализации (четкости) языка моделирования на точность моделирования или на пределы предсказуемости рассматриваемого процесса. Одним из простейших приемов изменения степени размытости описания временных рядов является изменение интервалов усреднения (сглаживания) входящих в них данных (например, переход от суточных данных к среднесезонным, среднесезонным, среднегодовым и т. д.). При этом как бы сужается спектр рассматриваемого процесса и расширяется его корреляционная функция, т. е. увеличивается интервал корреляции.

Корреляционные функции стока р. Днепр показаны на рис. 4.2. Более «широкую» автокорреляционную функцию имеет система дифференциальных уравнений, среднюю по ширине — система алгебраических и наиболее узкую — система интегральных уравнений [33].

В связи с однозначной зависимостью корреляционных и спектральных характеристик случайного процесса наряду с интервалом корреляции мерой предсказуемости процесса может служить также некоторая предельная частота, названная нами предельной частотой корреляции, при которой для значений $\omega > \omega_{\text{пред}}$ амплитуда спектра меньше некоторого порогового значения $S(\omega) \leq \Delta_{\text{пред}}$.

Ясно, что предлагаемая мера степени размытости языка моделирования не является универсальной и пригодна только для оценки некоторых языков математического моделирования, в первую очередь, для языков, отличающихся по интервалу усреднения переменных.

4.2.2. РАЗЛИЧИЕ МОДЕЛЕЙ НИЖНЕГО И ВЕРХНЕГО УРОВНЕЙ

Для детального долгосрочного прогноза можно использовать в качестве описания алгебраические уравнения статики или разностные уравнения динамики. Квазистатистические модели получаются для систем с большим запасом устойчивости при достаточно большом интервале усреднения. С увеличением шага дискретизации и усреднения переменных становится правомерным применение алгебраических моделей. Рассмотрим различия описаний (моделей) нижнего и верхнего уровней.

Применение нефизических моделей для более детального уровня прогнозов. Физические модели, подобные моделям, применяемым в математической физике, непригодны для долгосрочных прогнозов ввиду их чувствительности к помехам, малого предела прогнози-

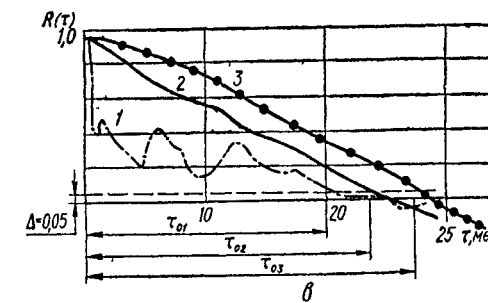
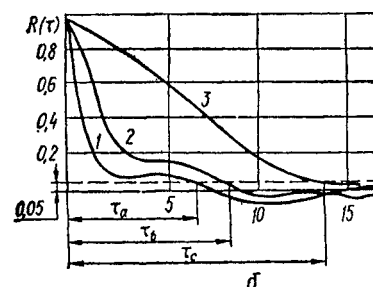
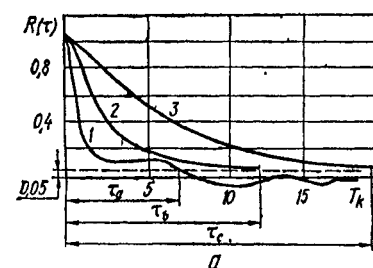


Рис. 4.2. Корреляционная функция стока р. Днепр при усреднении: а — календарном; б — скользящем; в — для уравнений (1 — интегральных; 2 — алгебраических; 3 — дифференциальных)

руемости, использования исключительно принципа ближнего действия, одномерных временных векторов, только временного или пространственного усреднения и т. д. Долгосрочные прогнозы могут быть существенно улучшены введением в моделирование многозначных временных векторов и отсчета переменных с различными интервалами временного или пространственного усреднения, а также с помощью учета отдаленных внешних воздействий. Нефизические модели при наличии помех оказываются более эффективными, чем физические.

Использование многомерного отсчета времени для детального уровня прогноза. Если прогнозируемые процессы являются циклическими, т. е. содержат явные сезонные колебания, то применение двух- или многомерных временных векторов может привести к существенному улучшению прогноза, причем особенно растет граница предсказания. В основе этого подхода лежит допущение о том, что для циклических процессов прогнозируемое значение зависит не только от реализаций, непосредственно предшествующих этому моменту времени (ближнее



Рис. 4.3. Одно- (а), двух- (б) и трехмерный (в) шаблоны и соответствующие им прогнозы

действие), но и от значений, удаленных на несколько шагов или циклов.

На рис. 4.3 показан качественный характер ожидаемого изменения при одно- (а), двух- (б) и трехмерном (в) временном векторе, где t_0 соответствует началу интервала прогнозирования, а t_s — моменту времени, начиная с которого прогноз в значитель-

ной степени совпадает с установившимся состоянием, т. е. пошаговый прогноз совпадает с трендом (климатическим средним).

Трехмерный временной вектор t, τ, θ необходим, например, при прогнозировании солнечной активности, где t — месяцы; τ — годы и θ — периоды солнечной активности (11,2 года).

Учет отдаленных воздействий в моделях детального уровня. В соответствии со стремлением учитывать возможно более обширное множество аргументов для выбора полного информационного базиса целесообразно в общем случае учитывать также значение ординат процесса в отдаленных точках. Так, для прогнозирования температуры воздуха в Свердловске* могут оказаться полезными значения температуры на Северном и Южном полюсах. Для прогнозирования стока р. Днепр могут иметь значение соответствующие показатели соседних рек. Если заданные аргументы неэффективны, т. е. они не вносят вклад в уменьшение критериев селекции, то ЭВМ не включает их в состав аргументов модели.

* Город Свердловск выбран авторами для определения температуры воздуха.

Применение средних значений в качестве аргументов модели нижнего и верхнего уровня детализации. Для циклических процессов (разд. 3.3.4) точность прогноза может быть повышена при помощи включения переменных, усредненных за разные временные или пространственные интервалы. Это значит, например, что в прогнозирующие модели для прогноза месячных значений y_t наряду с прошлыми месячными значениями y_{t-k} вводят еще определенные суммы

$$S_{y_{t-i}}^k = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} y_{t-i-r}, \quad k = 1, 2, \dots, q; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

4.3. АЛГОРИТМЫ ДОЛГОСРОЧНОГО КОЛИЧЕСТВЕННОГО ПРОГНОЗА

4.3.1. ОДНОУРОВНЕВЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Одноуровневый гармонический алгоритм является исключением из общего правила: благодаря точной априорной информации о том, что процесс представляет собой сумму незатухающих гармонических составляющих с некратными частотами, по нему удается получить долгосрочные количественные прогнозы циклических процессов. Это объясняется физическим механизмом таких колебательных процессов, во многих случаях получающихся из наложения природных процессов, частота которых задается явлениями природы с постоянной за-

35. Долгосрочный прогноз годового стока р. Днепр

Год	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Фактический сток	1670	969	1036	1320	1378	1028	1342	1502	1625	1726
Прогноз	1635	1061	909	925	1218	1328	1145	1197	1413	1510
Ошибка, %	2,10	0,48	12,26	24,9	11,6	29,2	16,7	20,3	13,1	12,5

кономерностью. Удачный выбор корней характеристического уравнения или частот гармоник обеспечивает хорошее качество прогноза на длительные интервалы. Успех прогнозирования зависит, главным образом, от уровня шумов, который может быть снижен при помощи выбора достаточно больших интервалов усреднения измеряемой величины.

Дальнейшее улучшение качества прогноза для долгосрочных периодов получается в рамках моделирования на одном уровне при использовании двух- или трехмерных временных векторов, т. е. при введении в модель таких величин, которые получаются в результате

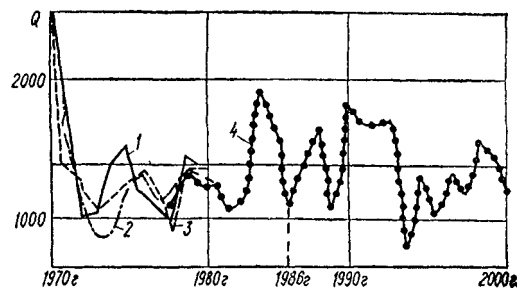
Рис 4.4 Кривые годового стока
р Днепр

1 — фактические данные, 2 — прогноз
Н Н Тодуа, 3 — прогноз В Н Высоцкого,
4 — прогноз В И Чеберкуса

усреднения на различных пространственных или временных интервалах (например, месяц, квартал, год).

Пример 35. Долгосрочный прогноз годового стока р Днепр [73]

Прогноз годового стока р Днепр, выполненный по тригонометрической модели, был настолько точным, что за прошедшие 10 лет отклонение его от среднего значения составило менее 13 % (табл. 35). Первые модели были получены Н Н Тодуа и В Н Высоцким. Кривые годового стока р. Днепр, полученные по этим моделям, по-



36. Значения коэффициентов гармонических моделей для прогноза годового стока
р. Днепр при $a_0 = 1400 \text{ м}^3/\text{с}$

i	ω_i	A_i	B_i	i	ω_i	A_i	B_i
1	0,35	42,55	-9,50	19	1,43	68,26	-56,51
2	0,91	6,99	57,53	20	1,67	0,61	27,42
3	1,48	-99,94	-10,32	21	1,92	12,24	60,12
4	2,15	16,58	61,67	22	2,23	-26,64	76,12
5	2,75	-37,19	-57,80	23	2,55	32,15	-12,80
6	0,23	84,26	1,44	24	2,66	68,06	-19,70
7	0,59	-56,73	-15,17	25	2,95	4,90	-13,87
8	0,96	-18,92	45,25	26	0,45	5,55	3,38
9	1,51	115,16	35,38	27	1,12	92,81	-1,08
10	1,74	26,97	97,03	28	1,85	30,89	-17,98
11	2,14	8,27	-14,00	29	2,69	38,07	-54,09
12	2,56	-14,88	23,39	30	0,72	48,70	73,76
13	2,85	85,27	4,26	31	2,38	34,71	-5,20
14	0,14	23,34	25,25	32	0,37	-6,06	-25,64
15	0,45	-56,5	-79,13	33	0,83	-18,31	-4,54
16	0,67	14,69	-86,40	34	1,5	65,99	-25,09
17	0,86	-58,3	43,35	35	2,23	0,38	0,88
18	1,16	32,08	3,97	36	2,74	-2,25	-10,70

казаны на рис. 4.4. Найденные для этой модели значения ошибки прогноза $\Delta^2(C) = 0,61$ или $0,66$ подтверждают ее пригодность для долгосрочного прогноза. Еще один прогноз был получен В. И. Чеберкусом по 100 реализациям за 1878—1977 гг. при помощи алгоритмов самоорганизации тригонометрических моделей. В табл. 36 приведены параметры модели

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{36} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t).$$

Значение критерия точности прогноза для 1978—1980 гг. $\Delta_1^2(C) = 0,181$. Долгосрочный прогноз показан на рис. 4.4

4.3.2. ДВУХУРОВНЕВЫЕ АЛГОРИТМЫ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

В двухуровневых алгоритмах долгосрочного прогноза последний выполняется отдельно для годовых и для сезонных значений переменных и результаты сравниваются по критерию баланса прогнозов. Целесообразность таких алгоритмов можно пояснить следующим образом: предельно достижимое время упреждения прогноза определяется шириной корреляционной функции процесса. Чем больше размыт математический язык моделирования, тем больше время корреляции и предельно достижимая заблаговременность прогнозов. В качестве примера ограничимся рассмотрением языков моделирования среднегодовых и среднесезонных значений ведущей переменной. Форма двумерной корреляционной функции такова, что за-

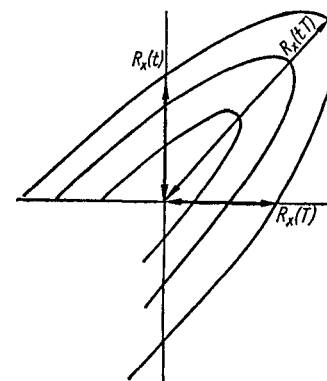


Рис. 4.5. Двухмерная корреляционная функция стока р. Северский Донец (t — сезон; T — год)

благовременность прогноза значительно больше при двухмерном отсчете времени (в годах и сезонах). На рис. 4.5 показана двумерная корреляционная функция стока р. Северский Донец. Время корреляции при отсчете времени только в сезонах или в годах значительно меньше времени корреляции при двухмерном отсчете:

$$R_x(T) \ll R_x(t, T); \quad R_x(T) \ll R_x(t, T),$$

что определяет преимущество двухмерного отсчета времени для увеличения заблаговременности прогнозов.

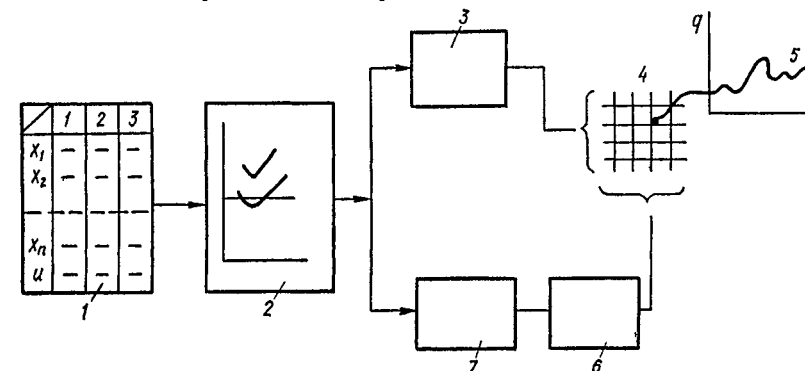


Рис. 4.6. Структурная схема двухуровневого количественного долгосрочного прогноза (при двухмерном отсчете времени)

1 — таблица данных; 2 — объективный системный анализ; 3 — сужение числа; 4 — полный перебор; 5 — прогноз; 6 — сезонные модели; 7 — годовые модели

Модели, используемые для двухуровневого прогноза при двухмерном отсчете времени, являются нефизическими, в частности, в них одновременно участвуют как годовые, так и сезонные значения переменных. Принципиальная схема структуры соответствующего алгоритма дана на рис. 4 б.

Для действия алгоритма двухуровневого долгосрочного количественного прогноза необходимо, чтобы сезонные и годовые прогнозы были получены при различном информационном базисе. Например, годовые прогнозы получают при одномерном линейном шаблоне, а сезонные — при Г-образном, с двухмерным отсчетом времени. Кроме того, в сезонных прогнозах используется календарная смена сезонов. Чем больше отличаются прогнозы по информационному базису, тем достовернее критерий баланса прогнозов. Кроме того, сезонные модели обычно нелинейны и отличаются по ансамблю внешних критериев, применяемых для их самоорганизации. В ансамбле критериев обязательно участвуют критерии точности прогноза RR и $I^2(K)$. При использовании двухмерного времени и двухуровневого алгоритма МГУА лучшие варианты прогноза годовых и сезонных значений ведущей переменной, полученные по МГУА, перебираются по критерию баланса прогнозов. Критерий баланса является главным критерием выбора прогнозирующих годовых и сезонных моделей.

4.3.3. ЭТАПЫ САМООРГАНИЗАЦИИ ДВУХУРОВНЕВЫХ ДОЛГОСРОЧНЫХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРОГНОЗОВ

Если бы мы располагали ЭВМ с неограниченной мощностью, то выбор детальных прогнозов в соответствии с иерархией критериев можно было бы осуществить непосредственно из всех возможных вариантов, получаемых при помощи комбинаторных алгоритмов. Ввиду ограниченных возможностей существующих вычислительных машин предлагается поэтапная реализация, при которой одновременно можно достичь сокращения объема перебора и уменьшения многозначности.

В общем случае при такой реализации алгоритмов различают следующие четыре этапа, которые получаются для двух уровней детализации (например, кварталов и лет).

1. Структурная идентификация и построение статической или динамической модели на низшем уровне детализации. Целью этого этапа является структурная идентификация, т. е. множество воздействий делится на 3 подмножества: выходные величины, входные величины и несущественные факторы. Алгоритмы, пригодные для решения этой задачи, подробно рассматривались в разд. 3.2.3 и 3.3.3. На этом уровне в системном критерии применяются рассмотренные в разд. 2.4 критерии селекции, например, критерий минимума смещения, критерий прогноза и др.

В результате самоорганизации получаем систему уравнений оптимальной структуры, соответствующую свойствам исследуемого объекта

и применяемому временному усреднению, и модель статической (система алгебраических уравнений) или динамической (система разностных уравнений) системы уравнений.

Однако для дальнейших исследований имеет значение лишь возникающий на этом этапе выбор входных и выходных величин. Воздействия, не входящие в эту систему уравнений, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

2. Долгосрочный прогноз на верхнем уровне детализации. Целью этого этапа является разделение всех переменных, выбранных на первом этапе, на «хорошие», «удовлетворительные» и «неудовлетворительные». Для этой цели по каждой из переменных, выбранных на первом этапе (входные и выходные величины статической или динамической системы), выполняются прогнозы с детализацией верхнего уровня. Для каждой из величин используются на одном уровне различные алгоритмы самоорганизации, например самоорганизация тригонометрических и степенных полиномов, полиномов тригонометрических и показательных функций, разностных уравнений и других в соответствии с задачей и набором алгоритмов самоорганизации прогнозирующих моделей, рассмотренных в гл. 3.

При этом для получения лучших прогнозов в выбранных алгоритмах самоорганизации применяются комбинированные критерии, состоящие из критериев селекции (критерий минимума смещения, регулярности, краткосрочного прогноза и пошагового интегрирования). Критерий

$$I^2(N) = \sum_{k=1}^{N-1} (z_{k+1} - A^k z_1)^T (z_{k+1} - A^k z_1) \rightarrow \min.$$

Из этих F_1 прогнозов в соответствии с комбинацией таких критериев верхнего уровня иерархии как сохранение моментов или функции распределения и критерия прогноза $\Delta_1^2(C)$ получают F_2 лучших прогнозов для каждого воздействия. В соответствии с заданным пороговым значением входные величины, для которых получались неудовлетворительные прогнозы, исключаются из дальнейшего рассмотрения. Оценка осуществляется в соответствии со сформулированной выше мерой $\Delta^2 < 0,8$ или $\rho(m) \leq 0,01$. Можно получить дальнейшее улучшение качества прогноза, если усреднить несколько хороших прогнозов. Если же в результате этих исследований невозможно найти алгоритм самоорганизации, который дает удовлетворительные прогнозы, то число уровней детализации нужно увеличить еще на один.

Для входных величин, отобранных на первом этапе, рекомендуется такой же подход или же обращаются к алгоритмам, которые показали себя особенно эффективными. Этот этап служит, прежде всего, для выбора ведущей выходной величины, которая дает хороший долгосрочный прогноз в соответствии с $\Delta_1^2(m)$ и $\rho(m)$. Для динамической модели можно при выборе выходной величины применять критерий пошагового интегрирования Q_3 .

3. Долгосрочный прогноз с большой детализацией. Целью этого этапа является получение долгосрочных прогнозов на нижнем уровне детализации. Для наглядности далее примем, что нижним уровнем детализации будет квартал, а следующим более высоким — год. В этом случае квартальные значения нужно скорректировать по средним годовым, а средние годовые значения оценивать, например, по требованию сохранения моментов. На данном этапе с помощью самоорганизации необходимо построить квартальные модели и спрогнозировать квартальные значения выбранных на первом этапе выходных величин. Для этого с помощью комбинаторных алгоритмов или алгоритмов группового учета аргументов строится ряд моделей, которые по мере надобности дают прогноз в соответствии с выбранными критериями. Особенность этих моделей состоит в том, что они содержат как квартальные, так и годовые значения выбранных на первом этапе входных и выходных величин, а также их временные запаздывания. Кроме того, в информационный базис нужно ввести соответственным образом подходящие функции тренда (например, степенные полиномы). На этом этапе вычислительной машине предлагается для выбора вся информация, которой располагаем на интервале наблюдения.

Для циклических моделей, например для каждого квартала (весна, лето, осень, зима), получается соответствующее множество моделей. Для ведущих выходных величин необходимо выбрать F_3 лучших моделей для каждого квартала, а для всех остальных выходных величин $F_4 < F_3$ моделей.

Используем выходные величины годовых моделей в качестве части факторов сезонных моделей. Допустим для конкретности, что в «веере» выходных величин годовых моделей имеется три прогноза: $Y^I(T)$, $Y^{II}(T)$, $Y^{III}(T)$, в «веере» сезонных моделей (с учетом календарной смены сезонов) — пять прогнозов: $y^{(1)}(tT)$; $y^{(2)}(tT)$; $y^{(3)}(tT)$; $y^{(4)}(tT)$ и $y^{(5)}(tT)$. Всего требуется перебрать $3 \times 5 = 15$ значений критерия баланса переменных, соответствующих различным вариантам (пересечениям сети). Тогда среди аргументов сезонных моделей, отвечающих пересечениям I — 1, I — 2, I — 3, I — 4 и I — 5, закономерно использовать среднегодовой прогноз $Y^I(T)$. Для пересечений II — 1, II — 2, II — 3, II — 4 и II — 5 можно применять сезонные модели с аргументом $Y^{II}(T)$. Для пересечений III — 1, III — 2, III — 3, III — 4 и III — 5 используются сезонные модели с аргументом $Y^{III}(T)$. Кроме указанных выходных величин годовых моделей во множество аргументов входят два измерения времени и запаздывающие значения всех величин, которыми располагаем на интервале прогноза. Речь идет о множестве аргументов, предлагаемых машине в составе полного полинома. Машина выберет только некоторые из них. Обучение сезонных моделей происходит только по данным для рассматриваемого сезона.

4. Выбор лучшей пары прогнозов. Задача этого этапа: из F_2 лучших моделей для годовых значений и F_3 лучших моделей для каждого квар-

тала испытать все возможные пары прогнозов и выбрать лучшую из них. Комбинация всех квартальных моделей, которая лучше всего удовлетворяет требованию критерия баланса, дает долгосрочный прогноз для всех выходных величин. Если имеется несколько выходных

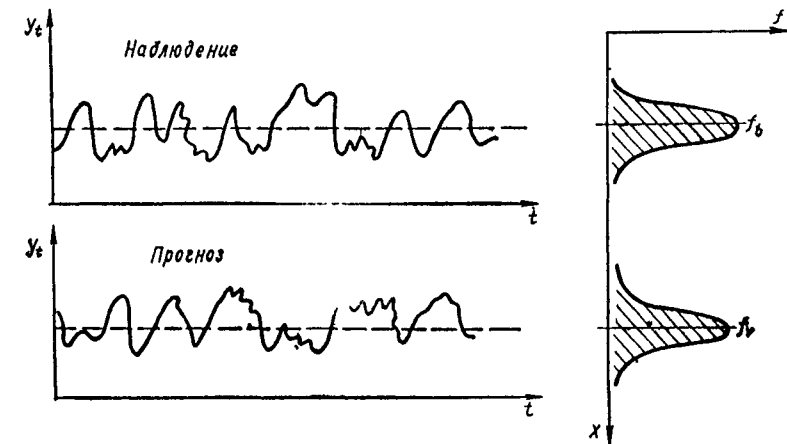


Рис. 4.7. К пояснению критерия устойчивости функции плотности вероятности амплитуды

величин $s > 1$, то лучшая комбинация квартальных моделей выбирается по системному критерию

$$B_i^* = \sqrt{s^{-1} \sum_{i=1}^s B_i^2} \rightarrow \min.$$

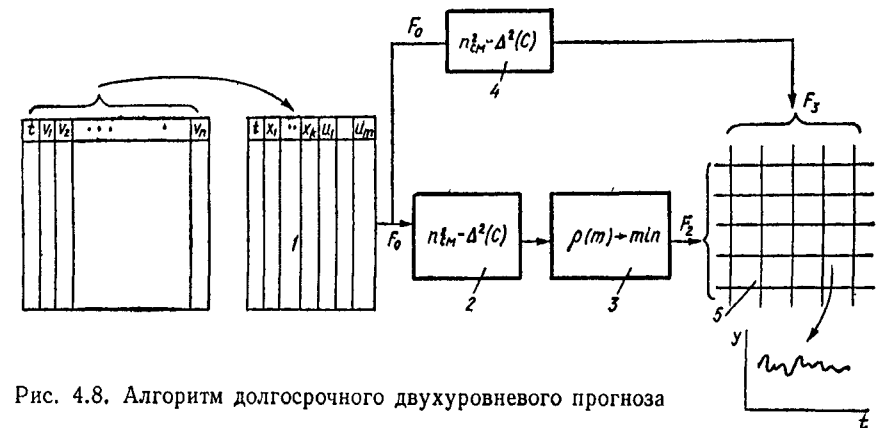


Рис. 4.8. Алгоритм долгосрочного двухуровневого прогноза

Следует подчеркнуть, что многозначность критериев баланса устраняется многообразием критериев селекции, используемых на нижних уровнях.

В целом полученный долгосрочный прогноз проходит следующую иерархию критериев
 минимума смещения, регулярности и др;
 сохранения моментов, функций распределения и др (рис. 4.7);
 баланса.

Иногда для прогноза рекомендуется еще применение мутаций — случайных отклонений параметров для повышения устойчивости

Схема описанной поэтапной процедуры долгосрочного прогноза изображена на рис. 4.8. Она содержит следующие этапы (за уровень детализации приняты квартал и год): сокращение таблицы наблюдений; самоорганизация F_2 годовых моделей; самоорганизация F_3 моделей для каждого квартала; выбор долгосрочных прогнозов и мутации модели по мере необходимости (структурная и параметрическая адаптация) с помощью методов поиска.

4.4. АЛГОРИТМЫ ДОЛГОСРОЧНОГО КОЛИЧЕСТВЕННОГО ПРОГНОЗА ПО ИНВАРИАНТАМ (ОДНОУРОВНЕВЫЕ)

4.4.1. ДВА СПОСОБА УВЕЛИЧЕНИЯ ВРЕМЕНИ УПРЕЖДЕНИЯ ПРОГНОЗОВ

Основным направлением работ по дальнейшему увеличению времени упреждения прогнозов является использование какой-либо достоверной априорной информации о будущем ходе процессов для выбора одного оптимального прогноза из нескольких отобранных предварительно по обычным критериям МГУА (с обязательным применением критерия минимума смещения $n_{см}$).

Двухуровневые алгоритмы долгосрочного прогноза. Информация о будущем может быть представлена в виде критерия баланса размытых и детальных прогнозов, например, в виде критерия, согласующего годовые и сезонные прогнозы.

Критерий баланса такого рода ведет к построению двухуровневых алгоритмов МГУА, что применяется как в полиномиальных алгоритмах, так и в обратных преобразованиях (включая гармонические алгоритмы).

Одноуровневые алгоритмы долгосрочного прогноза с использованием инвариантов. Информация о будущем может быть представлена в виде критерия баланса другого вида, построенного на применении каких-либо постоянных свойств (инвариантов) прогнозируемого процесса. При использовании инвариантов алгоритм прогноза может оставаться одноуровневым, когда применен какой-либо один математический язык, например только сезонные или только годовые данные и т. д. При построении прогнозов для экосистемы оз. Байкал оказалось, что биомасса зоопланктона начинает снижаться через два года после начала уменьшения биомассы мелозеры. Следовательно, нужно выбрать прогноз, где этот фазовый инвариант сохраняется.

4.4.2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ

Инвариантом автономной (замкнутой, определенной) динамической системы условимся называть некоторое постоянное соотношение между ее системными переменными, выполняющееся как на интервале наблюдения, так и на интервале прогноза. Инвариант можно использовать для выбора самого непротиворечивого прогноза среди нескольких прогнозов-претендентов.

Частотный инвариант выражается в постоянстве частотного спектра на интервалах наблюдений и прогноза. В случае экосистемы

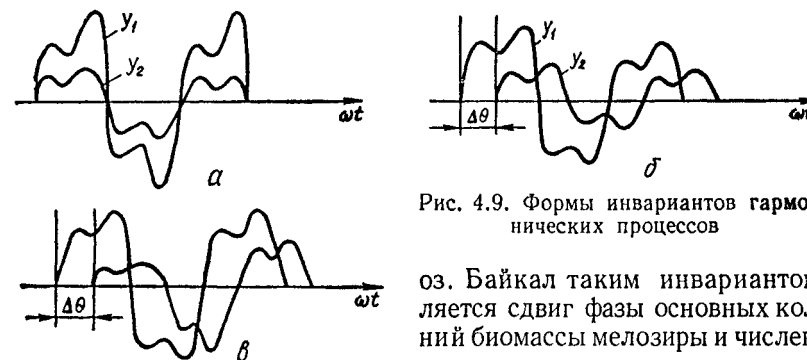


Рис. 4.9. Формы инвариантов гармонических процессов

оз. Байкал таким инвариантом является сдвиг фазы основных колебаний биомассы мелозеры и численности зоопланктона.

Фазовые инварианты, вызванные свойством инерции элементов системы, сохраняют свое постоянство как в выборке данных, так и на прогнозе. Для монотонных процессов инвариантами могут быть соотношения основных постоянных времени элементов системы, а для колебательных — фазы основных гармоник.

Рассмотрим основные формы фазовых инвариантов.

Алгебраический инвариант (рис. 4.9, а). Наиболее тесная связь переменных выражается в виде некоторой алгебраической функции

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Например, для двухфазной системы ($n = 2$) возможен линейный инвариант: $y_{1i} \pm ay_{2i} = 0$, где индекс i отвечает любому моменту времени.

Инвариант при $a = 1$ имеет, например, система гармонических осцилляторов одной частоты, начальные фазы колебаний которых подобраны так, что получается двух-, трех- или многофазный генератор переменного тока:

$$dy_1/dt + \omega = 0; \quad dy_2/dt + \omega = 0; \quad \dots; \quad dy_n/dt + \omega = 0.$$

Трехфазный генератор переменного тока ($n = 3$), как известно, имеет линейный инвариант мгновенных напряжений без запаздывающих аргументов такого вида: $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Разностный инвариант (рис 4.9, б) отличается от алгебраического только наличием сдвига по фазе между переменными. Например, для двухфазной системы

$$y_{1k} \pm ay_{2k+k} = 0,$$

где k — число тактов сдвига (в радианах) при $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = k = \text{const.}$

Инвариант фазы сдвига (рис. 4.9, в). При таком инварианте соотношение амплитуд не выполняется, но инвариантным является только фазовый сдвиг $\Delta\theta = \text{const.}$

4.4.3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКОСИСТЕМЫ оз. БАЙКАЛ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ТРЕНДА И ПОИСКА ИНВАРИАНТОВ

Связь многих природных явлений с активностью Солнца замечена давно. Одним из пионеров этого подхода при исследовании процессов был А. Л. Чижевский [89]. Большинство процессов, наблюдаемых в природе (сток рек или изменение метеорологических факторов), никогда точно не повторяются по форме. Это значит, что процессы лучше всего могут быть представлены суммой гармонических составляющих с некратными друг другу частотами.

Тем более неожиданными оказались результаты спектрального анализа: показатель солнечной активности (число Вольфа) и множество базисных переменных модели экосистемы оз. Байкал взаимосвязаны друг с другом и могут быть выражены с большой степенью точности в виде суммы основного колебания с периодом $T_0 = 11,2$ лет и его кратных гармоник, т. е. так:

$$\dots T_{-2} = 3T_0, T_{-1} = 2T_0, T_0, T_1 = \frac{T_0}{2}, T_2 = \frac{T_0}{3}, \dots$$

При кратных частотах гармоник картина изменения ординат тренда для каждой из переменных повторяется с практически допустимыми отклонениями через некоторый постоянный интервал времени, зависящий от периодов, амплитуд и фаз суммирующихся гармоник. В общем случае этот интервал не выражается целым числом лет. Так как годы измеряются целыми числами, то точного повторения картины годовых колебаний не наблюдается. На тренд наложен еще значительный колебательный нерегулярный остаток (порядка самого тренда). Кроме того, следует учитывать наличие гармоник инфранизких частот ($T > 11,2$ года). В результате ни на интервале интерполяции данных, ни на интервале прогноза нельзя найти повторяющихся участков кривых каждого процесса. Рассмотрим результаты спектрального анализа.

Пример 36. Выделение гармонических составляющих процессов в экосистеме оз. Байкал. Исходные данные, полученные на станции № 1 (Б. Коты) Института биологии Иркутского университета в 1950—1982 гг., представлены в табл. 34 [24].

37. Исходные данные и их интерполяция за 1950—1982 гг. и прогноз

Переменная	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Число Вольфа X_4	83,9 —	69,4 —	31,4 —	13,9 —	4,4 —	38,0 46,01	141,7 121,4	189,9 146,6
Биомасса мезопланктона X_1 , мг/м ³	200,00 —	20,00 —	25,00 —	300,00 —	25,00 —	7,01 —4,0	3,17 62,1	81,40 194,3
Биомасса зоопланктона X_2 , мг/м ³	—	—	—	—	—	8,49 18,9	8,42 10,5	4,96 10,3
Прозрачность воды X_3 , м	—	—	—	—	—	13,64 14,0	12,77 13,27	15,70 13,3
Температура поверхности X_5 , °C	—	—	—	—	—	4,29 4,37	4,16 4,49	3,55 3,49

Переменная	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
Число Вольфа X_4	104,7 135,5	66,6 94,9	68,4 66,5	38,3 37,5	34,5 33,6	15,5 13,2	13,9 14,2	27,5 29,2
Биомасса мезопланктона X_1 , мг/м ³	8,43 —12,6	65,06 117,5	14,46 118,3	26,17 51,8	194,79 65,5	13,73 196,1	7,57 38,5	0,75 —0,8
Биомасса зоопланктона X_2 , мг/м ³	11,78 17,3	5,68 6,0	9,00 7,8	11,68 10,8	10,17 10,2	9,58 11,7	6,85 13,8	22,10 22,1
Прозрачность воды X_3 , м	16,04 16,1	14,78 14,0	13,72 13,2	14,70 13,8	16,60 14,7	16,63 14,1	13,90 12,2	14,75 13,8
Температура поверхности X_5 , °C	4,10 4,16	4,33 4,33	4,25 3,99	3,53 4,05	5,30 4,62	4,23 4,29	5,0 4,61	4,33 4,31

Примечание. В числителе приведены фактические значения, в знаменателе — прогноз

Эти переменные составляют базисное множество, выбранное по программе ОСА. Биомасса фитопланктона, эпишуры, уровень воды и число часов сияния Солнца, как менее представительные, не вошли в системную модель [24]. Возможно, что ЭВМ выбрала в качестве одной из базисных величин прозрачность воды только потому, что ей не были предложены данные о численности бактерий. Алгоритмы МГУА, как известно, выбирают из каждого множества коррелированных между собой переменных одну-две представительные переменные [62]. Данные табл. 37 были использованы для спектрального анализа.

Существует несколько способов построения спектральной характеристики. Для высоких частот наиболее удобными являются построение (по точкам) кривой спектральной интенсивности или остаточной дисперсии. При некоторых условиях хорошие результаты дает быстрое преобразование Фурье. Для низких частот можно рекомендовать построение ранговой корреляционной функции, экстремумы которой подтверждают наличие той или иной частоты в исходной функции.

по тренду за 1983—1989 гг. переменных экосистемы оз. Байкал

1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
184,8	159,0	112,3	53,9	37,5	27,9	10,2	15,1	47,0	93,8	105,9	105,5
146,9	127,8	88,8	59,8	35,6	31,1	10,4	16,7	36,1	106,9	146,8	146,2
3,38	7,23	185,64	227,3	2,53	19,18	379,87	4,08	0,65	2,64	334,39	2,67
-18,5	21,9	121,7	114,6	32,4	103,0	180,1	14,8	-1,4	28,8	196,4	24,8
13,46	21,20	4,02	8,14	9,90	10,63	15,22	21,03	29,24	13,15	15,05	11,77
12,0	16,6	4,19	9,78	9,92	11,2	10,9	16,2	20,9	11,0	10,8	10,5
16,80	15,50	12,87	12,94	12,67	12,89	11,06	11,06	13,01	12,94	11,53	11,99
14,9	16,0	13,6	13,4	13,8	14,9	13,8	12,4	13,96	13,4	13,2	14,4
4,78	4,21	4,22	3,84	4,57	3,87	4,44	4,17	4,30	3,79	4,06	2,59
3,84	4,18	4,35	3,88	4,23	4,56	4,33	4,59	4,3	4,58	3,64	3,70

1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
90,3	155,3	154,0	140,4	116,3	—	—	—	—	—	—	—
90,6	145,2	145,4	141,5	102,0	72,7	41,2	34,7	17,5	11,7	24,6	74,1
50,10	110,70	50,0	100,0	—	—	—	—	—	—	—	—
6,6	178,0	77,3	-39,5	106,3	119,7	73,4	36,8	194,37	1,99	-2,1	-4,2
14,40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12,2	10,9	9,6	17,1	8,7	5,8	11,6	9,4	12,2	11,9	22,1	14,1
15,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13,6	13,2	14,0	16,1	14,6	13,1	13,7	14,4	14,6	12,3	13,5	13,8
5,58	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4,60	3,85	3,56	4,12	4,30	4,13	3,90	4,62	4,30	4,58	4,36	4,54

по тренду.

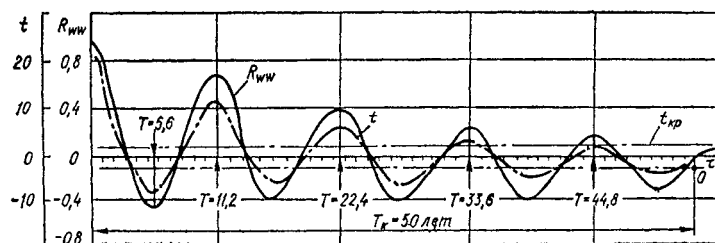


Рис. 4.10. Ранговая корреляционная функция для годовых значений Вольфа X_4 и для определения времени корреляции T_k

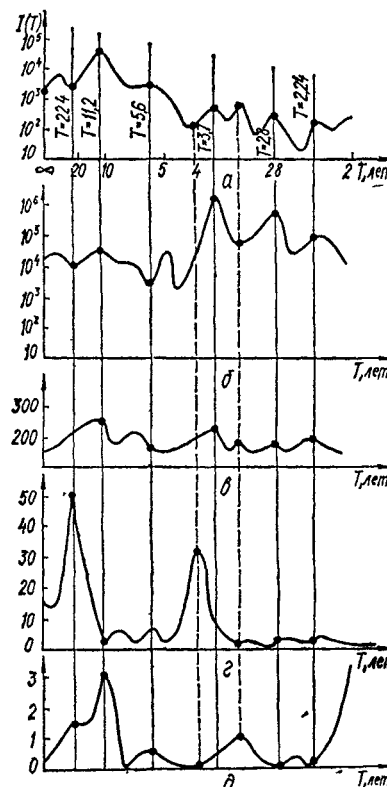


Рис. 4.11. Выборочные спектрограммы интенсивности $I(T)$

Для построения ранговых корреляционных функций исходные данные (табл. 37) были разделены на шесть уровней, при равном числе точек в каждом из них. Существенными считают частоты, периоды которых меньше времени корреляции T_k . Это время можно определить при помощи построения в общем случае многомерных корреляционных функций, размерность которых соответствует всем аргументам заданной прогнозирующей модели. Например, для авторегрессионной модели, прогнозирующей солнечную активность вида $X_{4(0)} = f(X_{4(-1)}, X_{4(-2)} \dots X_{4(-n)})$, время корреляции равно ординате точки O (рис. 4.10), лежащей на пересечении кривой показателя достоверности Стюдента

$$t = \left| R_{X_4, X_4}^R(\tau) \sqrt{(N-2)/(1 - R_{X_4, X_4}^2(\tau))} \right|,$$

и ее предельно допустимого минимального значения $t_{кр}$, определяемого по таблицам при доверительном интервале 0,95. Можно заключить, что время корреляции $T_k = 50$ лет. Кривые, показанные на рис. 4.10 и 4.11, подтверждают наличие солнечных гармоник с указанными выше периодами для всех наблюдаемых 5 базисных переменных.

Базисными переменными являются X_4 (рис. 4.11, а); X_1 (рис. 4.11, б); X_2 (рис. 4.11, в); X_3 (рис. 4.11, г) и X_5 (рис. 4.11, д). Кроме того, некоторые процессы содержат еще дополнительные частоты с периодами 2,9 лет, 4,2 года и др., что связано с малой продолжительностью и неточностью измерений.

4.4.4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫБОР ЧИСЛА ГАРМОНИК ТРЕНДА

Рассматриваемые процессы можно представить как сумму тренда и сравнительно небольшого стационарного остатка. Тренд равен сумме среднего и нескольких наиболее существенных гармонических составляющих. В табл. 38 приведены значения остаточной дисперсии, получаемой при выделении в качестве тренда тех или иных гармоник. С ростом числа гармоник, выделяемых в состав тренда, критерий нестационарности уменьшается. Остаток становится все более и более стационарным, т. е. поддающимся описанию при помощи разностных уравнений [7]. Однако этим свойством можно пользоваться только до некоторой меры. Критерий существенности частот t показывает, что выделение очень высоких частот статистически недостоверно: $t < t_{кр}$.

38. Остаточная дисперсия $RR(\omega)$, %, при выделении гармонического тренда с разным числом гармоник

Период частот тренда	$Q_4(T)$	$Q_1(T)$	$Q_2(T)$	$Q_3(T)$	$Q_5(T)$	Критерий по стационарности остатка ρ_5 для $Q_4(T)$, %
$T_0 = 11,2$	41,8	97,21	82,8	93,93	—	> 50 %
$T_1 = \frac{11,2}{2} = 5,6$	99,1	95,76	93,5	94,73	—	
$T_2 = \frac{11,2}{3} = 3,7$	98,9	71,86	78,5	87,89	—	
$T_3 = \frac{11,2}{4} = 2,8$	99,5	98,79	99,6	99,12	—	
$T_4 = \frac{11,2}{5} = 2,24$	99,7	95,81	89,2	98,03	—	
T_0, T_1	16,93	93,31	76,41	89,4	85,3	30,1
T_0, T_1, T_2	16,38	66,79	57,3	74,69	76,39	22,1
T_0, T_1, T_2, T_3	16,21	65,21	52,1	73,2	45,3	19,5
T_0, T_1, T_2, T_3, T_4	15,77	59,77	47,13	71,87	38,6	15,7

Поэтому в данном примере нами выбран тренд, состоящий из суммы среднего и пяти гармоник T_0, T_1, T_2, T_3 и T_4 . На рис. 4.12 показаны анализируемые процессы и их тренды. Уравнения трендов следующие:

$$Q_1(T) = 68.828 + 0.0971 \sin(2\pi T/11.2) - 6.889 \cos(2\pi T/11.2) - 10.408 \sin(2\pi T/5.6) + 1.782 \cos(2\pi T/5.6) + 5.229 \sin(2\pi T/3.7) + 2.871 \cos(2\pi T/3.7) - 0.451 \sin(2\pi T/2.8) - 5.267 \cos(2\pi T/2.8) - 4.271 \sin(2\pi T/2.2) - 3.179 \cos(2\pi T/2.2)$$

$$Q_2(T) = 12.338 - 0.176 \sin(2\pi T/11.2) + 0.705 \cos(2\pi T/11.2) - 0.041 \sin(2\pi T/5.6) + 0.006 \cos(2\pi T/5.6) - 0.663 \sin(2\pi T/3.7) - 0.337 \cos(2\pi T/3.7) - 0.039 \sin(2\pi T/2.8) + 0.258 \cos(2\pi T/2.8) + 0.089 \sin(2\pi T/2.2) + 0.073 \cos(2\pi T/2.2),$$

где T — время, измеренное в годах, начиная с 1955 г. ($T = 1$).

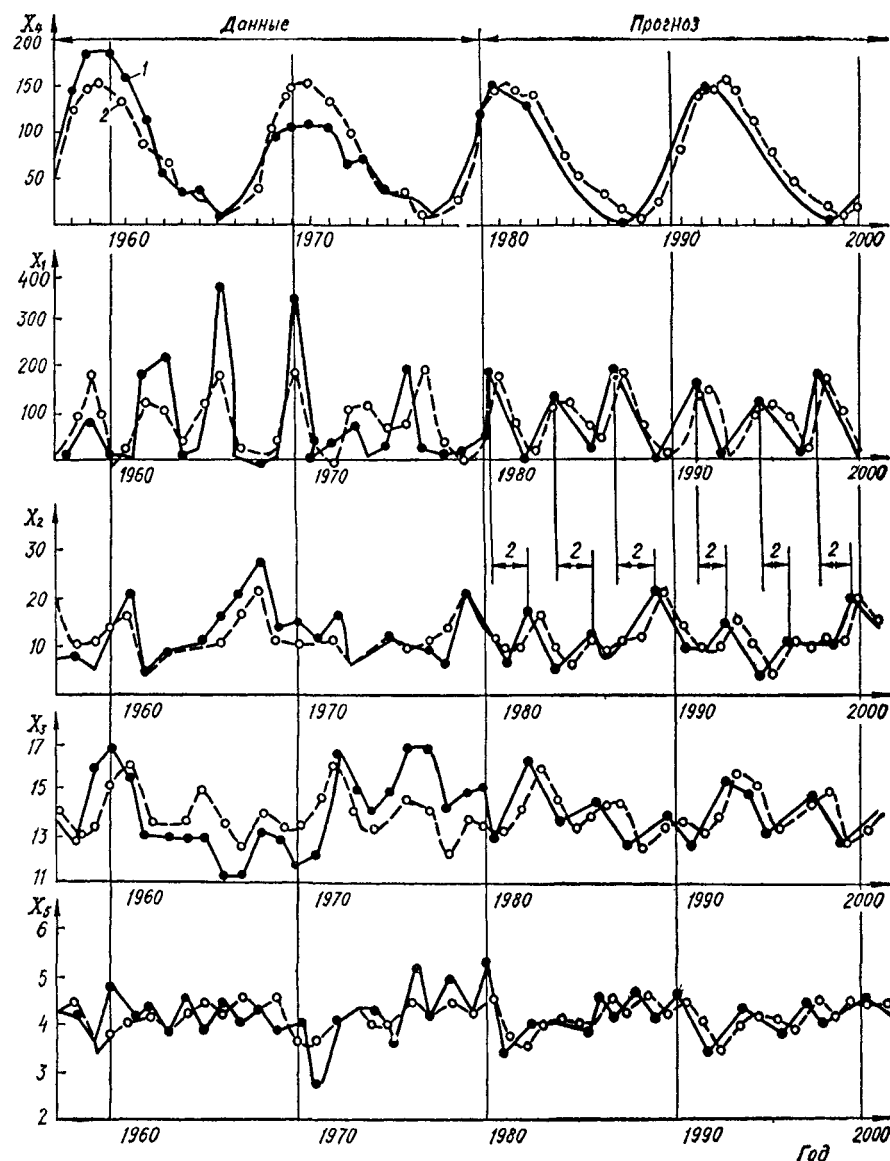


Рис. 4.12 Кривые изменения солнечной активности $W(t)$ и базисных переменных: фактические данные (1) и прогноз по сумме тренда и остатка (2) до 1979 г., прогноз по тренду и прогноз по сумме тренда и остатка 1980–2000 гг.

Остаток для каждой переменной представляет собой разность фактических данных и тренда. Инфранизкие кратные гармоники с периодами $T_{-1} = 2 \times 11,2 = 22,4$ года, $T_{-2} = 3 \times 11,2 = 33,6$ года и т. д. в трендах не использовались, т. к. для этого требуется более длинный ряд наблюдений, чем представленный в табл. 37. Учет инфранизких частот солнечной активности с периодами 22,4; 33,6, 44,8 и т. д. лет может потребоваться только для сверхдолгосрочных прогнозов солнечной активности, например до 3000 г. Так как длина ряда наблюдений (30 лет) не позволила нам выделить инфранизкие частоты, кратные периоду $T_0 = 11,2$ года, то с уверенностью можно говорить только о тренде для прогноза с временем упреждения не более 30 лет (т. е. до $1980 + 30 = 2010$ г.).

4.4.5. ОПТИМАЛЬНЫЙ ШАГ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОСИ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТРЕНДА ПРИ ПОМОЩИ БЕЗРАЗМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Математическим описанием тренда может быть как непосредственно сумма гармоник, так и безразмерное дифференциальное (или разностное) уравнение, коэффициенты которого выражаются через частоты. При помощи построения ранговой корреляционной функции (рис. 4.15) находим существенные инфранизкие периоды и частоты: $T_{-3} = 44,8$ года; $T_{-2} = 33,6$ года; $T_{-1} = 22,4$ года; $T_0 = 11,2$ года; $\omega_{-3} = 2\pi/T = 0,14$ 1/год; $\omega_{-2} = 0,187$ 1/год; $\omega_{-1} = 0,280$ 1/год; $\omega_0 = 0,561$ 1/год. При помощи построения функции спектральной интенсивности (рис. 4.16) находим существенные высокие периоды и частоты: $T_0 = 11,2$ года; $T_1 = 5,6$ года; $T_2 = 3,73$ года; $T_3 = 2,8$ года; $T_4 = 2,44$ года; $\omega_0 = 0,561$ 1/год; $\omega_1 = 1,121$ 1/год; $\omega_2 = 1,684$ 1/год; $\omega_3 = 2,243$ 1/год; $\omega_4 = 2,804$ года. Безразмерное уравнение динамики для восьми существенных частот должно быть 16-го порядка, т. е. в нем должны учитываться 16 запаздывающих ординат процесса. Собственная частота процесса, 1/год,

$$\omega = \sqrt[16]{\omega_{-3}^2 \omega_{-2}^2 \omega_{-1}^2 \omega_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2} = 0,91.$$

Оптимальный шаг дискретизации оси времени, лет, $\Delta T = 1/\omega = 1,099$. Действуя аналогично для наборов частот, находим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2} = 0,56;$$

$$\omega = \sqrt[6]{\omega_{-1}^2 \omega_0^2 \omega_1^2} = 0,65,$$

$$\omega = \sqrt[10]{\omega_{-2}^2 \omega_{-1}^2 \omega_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2} = 0,84;$$

$$\omega = \sqrt[14]{\omega_{-3}^2 \omega_{-2}^2 \omega_{-1}^2 \omega_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2} = 0,94;$$

$$\omega = \sqrt[16]{\omega_0^2 \omega_1^2} = 0,793;$$

$$\omega = \sqrt[6]{\omega_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2} = 1,014;$$

$$\omega = \sqrt[8]{\omega_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2} = 1,114;$$

.....

Для «солнечных» частот существует следующая закономерность: при увеличении числа учитываемых гармоник оптимальный шаг дискретизации оси времени $\Delta t = 1/\omega$ стремится к единице. Физический смысл такой закономерности еще не объяснен. Можно заключить, что корреляционный и спектральный анализы позволяют найти существенные частоты процесса. Последняя частота определяет порядок и оценки коэффициентов дифференциального уравнения (и его разностного аналога — прогнозирующей формулы), решением которого является гармонический тренд процесса. Число учитываемых в разностном уравнении запаздывающих ординат равно порядку уравнения (оно в два раза больше числа частот), а шаг, с которым следует отсчитывать запаздывающие ординаты, $\Delta t = 1/\omega$. При большом числе частот шаг равен одному году, при малом следует пропускать некоторые запаздывающие ординаты. Если учитываются три частоты ω_{-1} , ω_0 , ω_1 (дифференциальное уравнение шестого порядка), то $\Delta t = 1/\omega_0 = 1/0,65 = 1,54$, т. е. желательно учесть ординаты $q_{-1,54}$; $q_{-3,08}$; $q_{-4,62}$. Округляя, получаем ординаты, используемые в разностной прогнозирующей формуле: q_{-2} ; q_{-3} ; q_{-5} ; q_{-6} ; q_{-8} ; q_{-9} .

Становится ясным, что при описании в виде безразмерного уравнения требуется выборка минимальной длины (всего 6 точек при учете 3 частот).

Выбор системы разностных уравнений, описывающих изменение остатка, по алгоритму ОСА. Процессы выражаются в виде суммы тренда и остатка $X(t) = Q(t) + x(t)$. Разностные уравнения остатка могут иметь три эквивалентных друг другу вида:

$$x_{i(0)} = f_1(Q_{i(k)}, X_{i(k)}); \quad x_{i(0)} = f_2(Q_{i(k)}, x_{i(k)}) \quad \text{и} \quad x_{i(0)} = f_3(X_{i(k)}, x_{i(k)}),$$

где переменная $x_{i(k)}$ изменяется случайным образом.

Опишем выбор системы разностных уравнений остатка вида

$$x_{i(0)} = f_3(X_{i(k)}, Q_{i(k)}).$$

По алгоритму ОСА на плоскости двух критериев селекции $(n_{\text{см}}^*)^2$ и $I^2(N)$ (при ограничении $\Delta^2(C) \leq 1$), где $(n_{\text{см}}^*)^2$ — системный критерий минимума смещения, сравниваются следующие гипотезы (большие буквы — ординаты процесса и тренда, а малые — ординаты остатка).

1. Модель остатка оптимальной сложности состоит из одного уравнения, содержащего девять слагаемых:

$$x_{i(0)} = a_0 + a_1 Q_{i(-1)} + a_2 Q_{i(-2)} + a_3 Q_{i(-3)} + a_4 Q_{i(-4)} + a_5 X_{i(-1)} + \\ + a_6 X_{i(-2)} + a_7 X_{i(-3)} + a_8 X_{i(-4)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Модель состоит из двух уравнений, содержащих семнадцать слагаемых:

$$x_{i(0)} = a_0 + a_1 Q_{i(-1)} + a_1 Q_{i(-2)} + a_3 Q_{i(-3)} + a_4 Q_{i(-4)} + a_5 X_{i(-1)} + \\ + a_6 X_{i(-2)} + a_7 X_{i(-3)} + a_8 X_{i(-4)} + b_1 Q_{j(-1)} + b_2 Q_{j(-2)} + b_3 Q_{j(-3)} + \\ + b_3 Q_{j(-4)} + b_5 X_{j(-1)} + b_6 X_{j(-2)} + b_7 X_{j(-3)} + b_8 X_{j(-4)}.$$

3. Модель состоит из трех уравнений, содержащих 25 слагаемых.

4. Модель состоит из четырех уравнений, содержащих 36 слагаемых.

5. Модель состоит из пяти уравнений, содержащих 49 слагаемых. Оптимальными считаются уравнения характеристик точки, которые расположены ближе к началу координат плоскости двух критериев $(n_{см}^*)^2 - I^2(N)$ (при ограничении $\Delta^2(C) \leq 1$).

Критерий $I^2(N)$ является регуляризирующим, т.е. используется только для достижения однозначности выбора и повышения его помехоустойчивости, поэтому сравнение систем уравнений выполняется только по одному главному критерию $n_{см}^*$.

Лучшими считаются системы, у которых системный критерий минимума смещения меньше (рис. 4.13). Системный критерий равен арифметическому среднему критериев минимума смещения уравнений, входящих в систему *:

$$n_{см}^* = (n_{см_1} + n_{см_2} + \dots + n_{см_s})/5.$$

Характеристические точки лучших моделей системы уравнения оптимальной сложности по алгоритму МГУА лежат ниже уровня доверия D (рис. 4.13).

* Данный вид свертки нескольких частных критериев, характеризующих отдельные уравнения, в один системный является первым приближением. Он, хотя и прост, но нарушает принцип неокончателных решений Д. Габора. Согласно этому принципу следует выбрать не по одному лучшему уравнению для каждой выходной переменной, а по несколько и организовать перебор систем, которые можно образовать из всех отобранных уравнений, по двум внешним критериям (основному и регуляризирующему). Для краткости изложения такое уточнение выбора оптимальной системы уравнений здесь опустим. См. и с. 171

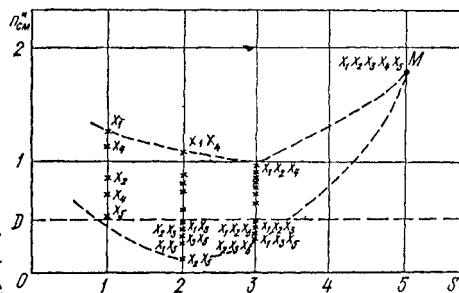


Рис. 4.13. К сравнению систем уравнений по критерию минимума смещения

4.4.6. ДОЛГОСРОЧНЫЙ КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ПРОГНОЗ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ИНВАРИАНТУ

Для выбора систем уравнений, моделирующих остаток, в алгоритмах ОСА была выделена не одна модель, а множество из 10 моделей, лежащих ниже некоторого уровня доверия D (рис. 4.13). Выбранные модели сравнивались на интервале прогноза по степени близости к фазовому инварианту.

Инвариант в экосистеме оз. Байкал можно выразить так: как только мелозира x_1 достигает максимума, то точно через два года начинает снижаться биомасса зоопланктона x_2 . Критерий для выбора оптимального одноуровневого долгосрочного прогноза по инварианту имеет следующий вид:

$$\rho_{\Delta\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2 - \Delta\mu_i)^2 \rightarrow \min,$$

где $\Delta\mu_i$ — расстояние между максимумами x_1 и x_2 ; N — число максимумов на интервале прогноза.

Лучшими по критерию инвариантности оказались следующие модели остатка:

$$\begin{cases} x_1 = 0,5935Q_{1,-2} + 84,486Q_{5,-1} - 0,534X_{1,-2} - 121,93X_{5,-1} + \\ + 37,48X_{5,-2}; \\ x_2 = -0,014403Q_{1,0} - 0,3578Q_{2,-1} + 2,355Q_{5,-1} + \\ + 0,347X_{2,-1} - 0,004X_{1,-2} - 1,824X_{5,-2}; \\ x_5 = -0,5608 - 0,003468Q_{2,0} + 0,01209Q_{2,-2} + \\ + 0,1661X_{5,-2} - 0,001082X_{1,-1} - 0,01553X_{2,-2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,5935Q_{1,-2} + 84,486Q_{5,-1} - 0,534X_{1,-2} - 121,929X_{5,-1} + \\ + 37,4799X_{5,-2}; \\ x_5 = -0,5383 + 0,15188X_{5,-2} - 0,001198X_{1,-2} - \\ - 0,000549X_{1,-2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -10,2026 + 76\,624Q_{5,0} + 0,20146X_{2,-1} + \\ + 0,301139X_{2,-2} - 0,166203X_{3,-1}; \\ x_3 = 7,90344 - 0,6050Q_{3,0} - 0,43138Q_{3,-2} + \\ + 0,46558X_{3,-1}. \end{cases}$$

Прогнозы, полученные на отобранной по инварианту модели, показаны на рис. 4.13. Остаток быстро сходится к установившемуся движению, и прогноз почти не отличается от трендовых значений. Это объясняется тем, что тренд в виде суммы пяти гармоник достаточно точно аппроксимирует весь процесс.

4.5. ТИПОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗА

В результате моделирования по небольшим выборкам данных разнообразных объектов индуктивными методами самоорганизации моделей, реализуемых алгоритмами МГУА, была выработана определенная целесообразная последовательность математических операций. Некоторые из них в конкретных задачах могут быть опущены.

Перечислим возможные операции в порядке их целесообразного применения.

4.5.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ И КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

Усреднение данных по сезонам и годам. Исходные данные представляют в виде среднесезонных и годовых значений, причем усреднение измерений выполняется специалистами-экспертами. Выборка должна содержать не менее 10 точек. Число переменных практически неограничено (до 1 000). Это не нарушает известного в статистике требования невырожденности (квадратной формы) информационной матрицы, так как в алгоритмах МГУА переменные включаются в модель небольшими частями (меньше 16—20 переменных одновременно).

Выбор наиболее непротиворечивых систем разностных уравнений и множества выходных переменных по алгоритму ОСА. С помощью алгоритма ОСА выбирают на плоскости двух внешних критериев минимума смещения и точности прогноза самые несмещенные уравнения, образуют системы с одним, двумя, тремя и т. д. уравнениями и находят несколько наиболее непротиворечивых (несмещенных) систем уравнений. При этом модельер только указывает основной $n_{\text{см}}^2$ и регуляризирующий $I^2(K)$ критерии и не участвует в самом моделировании.

Доопределение системы уравнений и множества ведущих переменных экспертами. Сравнивая несколько систем уравнений, выбранных машиной, эксперт (модельер) выбирает одну из них. В алгоритмах долгосрочного прогноза экспертов в этой операции заменяет перебор по некоторому критерию второго уровня — по инварианту или критерию баланса.

Краткосрочный прогноз по сценарию статус-кво. Формально внешние (экзогенные) переменные считаются системными (эндогенными). Тогда в результате ОСА получается автономная (замкнутая) система разностных уравнений, пошаговое интегрирование которой дает прогноз при условии «все будет так, как было».

Аппроксимация зависимостей объекта в виде неавтономной (неоднородной) системы уравнений. Вычеркнув уравнения, в которых выходными являются экзогенные переменные, получим систему, иденти-

фицирующую объект и восстанавливающую его закономерности. Алгоритм ОСА позволяет использовать и нелинейные разностные уравнения. Аппроксимация может быть улучшена также при помощи перехода к безразмерным разностным уравнениям, которые описаны в алгоритмах МГУА для долгосрочного прогноза.

4.5.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

Спектральный (или экспоненциальный) анализ ведущих переменных. При помощи быстрого преобразования Фурье (или другими статистическими способами) находятся частоты гармонических составляющих регулярной составляющей ведущих переменных (указанных ОСА), т. е. их тренда. Тренд равен сумме среднего и нескольких существенных частот (или экспонент). Остаток равен разности фактических данных и тренда: $x(t) = X(t) - Q(t)$. Существенными считают частоты, периоды которых меньше интервала времени корреляции $T < T_k$. Этот интервал можно определить при помощи построения, в общем случае, многомерных корреляционных функций, размерность которых соответствует всем аргументам заданной прогнозирующей модели. Например, для авторегрессионной модели, прогнозирующей солнечную активность вида

$$W_0 = f(W_{(-1)}, W_{-2}, W_{-3}, \dots),$$

время корреляции равно ординате точки O (рис. 4.10), лежащей на пересечении кривой показателя достоверности Стьюдента и его предельно допустимого минимального значения $t_{\text{кр}}$, определяемого по таблицам при доверительном интервале 0,95. Время корреляции для указанной модели $T_k = 50$ лет.

Ранговый корреляционный анализ ведущих переменных. Построение функции ранговой корреляции позволяет определить время корреляции T_k . Частоты, расположенные слева от точки O , считаются существенными и входят в состав гармонического тренда (рис. 4.10). Кроме того, по экстремумам корреляционной функции определяется шаг дискретизации переменных.

Определение оптимального шага дискретизации и долгосрочный прогноз переменных по тренду при помощи безразмерных разностных уравнений. Экстремумы ранговой корреляционной функции определяют запаздывающие значения переменных, которые целесообразно учитывать в модели. Более точно шаг дискретизации времени (и пространства) можно определить при помощи образования безразмерных разностных уравнений. Тренд может быть представлен или такими уравнениями, или их решениями в виде эквивалентной суммы гармоник. Безразмерные уравнения предпочтительнее, так как их коэффициенты выражаются через частоты, поэтому можно избежать определения оценок коэффициентов по методу наименьших квадратов, хотя начальные

условия определяются по-прежнему по этому методу. После интервала, равного времени корреляции, лучшим долгосрочным прогнозом является прогноз по тренду (для циклических прогнозов — прогноз по календарному среднему) без учета переходной составляющей остатка.

Уточнение прогноза по тренду при помощи добавления остатка. На интервале, где упреждение прогноза меньше времени корреляции при $T_y < T_k$, прогноз можно улучшить добавлением остатка. Лучшими описаниями остатка являются система разностных уравнений, выбираемая по ОСА, и корреляционная модель стандартной структуры.

Степень устойчивости переходной составляющей остатка следует оптимизировать. Обычно получается, что для точности краткосрочного прогноза требуется слабозатухающий остаток, а для долгосрочного прогноза затухания следует увеличить (см. с. 107).

Выбор оптимального долгосрочного прогноза по инварианту или по критерию баланса годовых и сезонных прогнозов. При помощи сравнения (перебора) 20—30 лучших (по другим критериям) прогнозов выбирается один по инварианту или по критерию баланса прогнозов. Достоверность долгосрочного количественного прогноза увеличивается при использовании *интервального прогноза* в форме прогноза уровней или рангов. Прогнозируемая величина делится на ряд уровней (с учетом требований теоремы Видроу) и в прогнозе указывается последовательность их смены во времени. Чем меньше уровней, тем больше время упреждения прогноза. Критерий баланса двух прогнозов, отличающихся по числу уровней, позволяет поднять время упреждения более детального прогноза до времени упреждения самого грубого прогноза, с разделением величины всего на два уровня (см. табл. 3).

* * *

Идентификация физической модели по выборке данных наблюдений может быть осуществлена при значительном уровне помех. Для этого достаточно по двум-трем точкам найти прямую геометрического места минимумов критерия непротиворечивости. Пересечение прямой с осью абсцисс укажет физическую модель в виде одного уравнения или в виде системы уравнений.

Самоорганизацию прогнозирующих нефизических моделей можно считать успешно завершенной, если при прогнозе стационарного процесса достигнуто время упреждения (т. е. интервал, где $\dot{R}R = \Delta^2(C) \leq 1$) не меньше времени его корреляции. При двухуровневом прогнозе время упреждения должно быть не меньше времени корреляции более размытого процесса. Для нестационарных процессов рекомендуется выделение тренда. Время упреждения прогноза по тренду равно бесконечности, а для стационарного остатка действует указанное выше правило: время упреждения прогноза остатка должно быть не меньше интервала его корреляции. Степень

устойчивости остатка выбирается так, чтобы повысить точность прогноза на начальном его участке. Далее процесс прогнозируется только по тренду.

Если указанная точность и упреждение не достигнуты, то следует усовершенствовать алгоритм МГУА: увеличить разнообразие множества моделей-претендентов, подаваемых на перебор по критериям. Можно представить МГУА как метод, демонстрирующий целесообразную организацию перебора модели по многозначным основным критериям (непротиворечивости и баланса прогнозов). Для достижения однозначного выбора требуется регуляризация, т. е. на перебор по указанным основным критериям нужно подать небольшое число моделей уже отобранных по вспомогательным, однозначным критериям.

Увеличение разнообразия множества моделей-претендентов достигается при помощи перехода от простых полиномиальных алгоритмов к обобщенному мультипликативно-аддитивному алгоритму МГУА. Нефизические корреляционные модели стандартной структуры являются другим направлением увеличения разнообразия области перебора. Примеры показывают большую эффективность этих новых моделей как для прогноза процессов, так и для экстраполяции полей. Если число предикторов невелико, то достаточное разнообразие моделей-претендентов можно получить при помощи нефизических моделей в виде графов числа переходов. Обратная связь, адаптирующая матрицу графа, устраняет неустойчивость прогноза.

Общий вывод состоит в том, что необходимо использовать различные области бесконечного функционального пространства для генерации множества моделей-претендентов, до тех пор пока не будут достигнуты указанные выше предельные возможности прогнозирования процессов и экстраполяции полей по выборке данных наблюдений. Эти пределы в большинстве случаев достаточны для решения большинства практических задач, особенно при использовании двухуровневых алгоритмов МГУА, обеспечивающих значительное время упреждения прогноза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аканке Х. Развитие статистических методов.— В кн.: Современные методы идентификации систем.— М.: Мир, 1983.— 400 с.
2. Алимов Ю. И. О практической ценности теории оценок.— Автоматика, 1981, № 2, с. 84—94.
3. Антропогенные изменения атмосферы Земли.— Природа, 1981, № 10, с. 102—103.
4. Беляев В. И. Теория сложных геосистем.— Киев: Наук. думка, 1978.— 152 с.
5. Берталанфи Л. История и статус общей теории систем.— В кн.: Системные исследования: Ежегодник, 1973.— М.: Наука, 1973, с. 20—37.
6. Бир Ст. Кибернетика и управление производством.— М.: Наука, 1965.— 391 с.
7. Бокс Дж., Дженкис Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.— М.: Мир, 1974.— 180 с.
8. Борисенко Е. П. Климат и деятельность человека.— М.: Наука, 1982.— 129 с.
9. Браверман В. Я., Ивахненко Н. А. Прогнозирование производительности труда в энергетическом строительстве на основе алгоритмов МГУА.— Автоматика, 1981, № 2, с. 10—17.
10. Брусиловский П. М., Розенберг Г. С. Проверка неадекватности имитационной модели динамической системы с помощью алгоритмов МГУА.— Автоматика, 1981, № 6, с. 43—48.
11. Букатова И. Л. Эволюционное моделирование: Идеи, основы теории, приложения.— М.: Знание, 1981.— 64 с.
12. Власова В. И., Сонечкин Д. М. Исследование предсказуемости в моделях системы гидродинамического типа.— Тр. Гидрометеорол. Центра СССР, 1978, вып. 210, с. 27—29.
13. Высоцкий В. Н. О наилучшем разделении экспериментальных данных в алгоритмах МГУА.— Автоматика, 1976, № 6, с. 71—74.
14. Галазий Г. И. Экосистема Байкала и проблема ее охраны.— Природа, 1978, № 8, с. 1—8.
15. Глушков В. М. Прогнозирование на основе метода экспертных оценок.— Кибернетика, 1969, № 2, с. 3—11.
16. Горелова В. Л. Математические методы прогнозирования.— В кн.: Рабочая книга по прогнозированию.— М.: Мысль, 1982.— 430 с.
17. Горстко А. Б. Математическое моделирование и проблемы использования водных ресурсов.— Ростов н/Д. Изд-во Рост. ун-та, 1976.— 63 с.
18. Грекова И. Полемика и ее цена.— Новый мир, 1973, № 8, с. 57—65.
19. Грошков А. Н., Мельник В. С. Задача оптимального управления линейными объектами с распределенными параметрами (на примере управления качеством воздуха промышленного города).— Автоматика, 1980, № 1, с. 57—66.
20. Дадаев В. С. О разработке моделей мировой экономики.— Финансы и мат. методы, 1984, том 20, вып. 1, с. 119—129.
21. Дылбокова Д. А., Дылбоков И. С. Прогнозирование тенденций развития ЭЦВМ по МГУА по детально-линейным частным описаниям и критерию баланса переменных.— Автоматика, 1975, № 2, с. 30—37.
22. Загоруйко Н. Г. Об определении понятия «закономерность». — Эмпирическое предсказание и распознавание образов / Вычислительные системы, Новосибирск, 1979, вып. 79, с. 3—6.
23. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.— Киев: Техніка, 1975.— 372 с.
24. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем.— Киев: Наук. думка, 1982.— 296 с.
25. Ивахненко А. Г. Метод группового учета аргументов — конкурент метода стохастической аппроксимации.— Автоматика, 1968, № 3, с. 57—73.

26. Ивахненко А. Г. Новые акценты в теории самоорганизации моделей.— Автоматика, 1981, № 6, с. 48—60.
27. Ивахненко А. Г. Обобщение языка диалога как средство уменьшения степени участия человека в решении задач системного анализа, прогноза и управления.— Автоматика, 1978, № 6, с. 3—8.
28. Ивахненко А. Г. Развитие, современное состояние и будущее МГУА: (Обзор).— Автоматика, 1982, № 5, с. 3—17.
29. Ивахненко А. Г. Самоорганизующиеся системы распознавания и автоматического управления.— Киев: Техніка, 1969.— 391 с.
30. Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике.— Киев: Техніка, 1971.— 364 с.
31. Ивахненко А. Г. Электроавтоматика.— Киев: Гостехиздат УССР, 1957.— 439 с.
32. Ивахненко А. Г., Карпинский А. М. Самоорганизация моделей на ЭВМ в терминах общей теории связи (теории информации).— Автоматика, 1982, № 4, с. 7—26.
33. Ивахненко А. Г., Козубовский С. Ф. Интервал корреляции как мера предсказуемости случайного процесса и детализации языка моделирования.— Автоматика, 1981, № 4, с. 3—9.
34. Ивахненко А. Г., Кротов Г. И. Моделирование загрязнения среды при отсутствии информации о выбросах источников загрязнения.— Автоматика, 1977, № 5, с. 14—30.
35. Ивахненко А. Г., Кротов Г. И. Самоорганизация моделей с переменными коэффициентами для оптимизации проектирования водных объектов.— Автоматика, 1980, № 6, с. 11—30.
36. Ивахненко А. Г., Кротов Г. И. Сравнительное исследование самоорганизации моделей физических полей.— Автоматика, 1978, № 6, с. 3—8.
37. Ивахненко А. Г., Степашко В. С. Помехоустойчивость моделирования.— Киев: Наук. думка, 1984.— с. 295.
38. Ивахненко А. Г., Степашко В. С. Численное исследование помехоустойчивости многокритериальной селекции моделей.— Автоматика, 1982, № 4, с. 26—36.
39. Ивахненко А. Г., Зайченко Ю. П., Димитров В. Д. Принятие решений на основе самоорганизации.— М.: Сов. радио, 1976.— 280 с.
40. Ивахненко А. Г., Копла Ю. В., Грошков А. Н. Синтез комбинированной модели поля загрязнения атмосферы города по экспериментальным данным.— Автоматика, 1981, № 1, с. 21—28.
41. Ивахненко А. Г., Костенко Ю. В., Голузов И. В. Системный анализ и долгосрочный количественный прогноз квазистатистических систем на основе самоорганизации моделей. Ч. 1.— Автоматика, 1982, № 3, с. 11—20; Объективный системный анализ без априорного указания внешних воздействий. Ч. 2.— Автоматика, 1983, № 3, с. 3—11.
42. Ивахненко А. Г., Кротов Г. И., Чеберкус В. И. Гармонические и экспоненциально-гармонические алгоритмы МГУА для долгосрочного прогноза колебательных процессов.— Автоматика, 1981, № 3, с. 17—32.
43. Ивахненко А. Г., Кротов Г. И., Чеберкус В. И. Многорядный алгоритм самоорганизации долгосрочных прогнозов (на примере экологической системы оз. Байкал).— Автоматика, 1980, № 4, с. 28—47.
44. Ивахненко А. Г., Пека П. Ю., Востров Н. Н. Комбинированный метод моделирования водных и нефтяных полей.— Наук. думка, 1984.— 150 с.
45. Васильев В. И., Коваль П. Н., Коноваленко В. В. Имитационное управление сталеплавиными процессами с использованием элементов теории распознавания образов. Ч. 1.— Автоматика, 1982, № 1, с. 60—65.
46. Каश्यп Р. Л., Рао А. Р. Динамика стохастических моделей по эмпирическим данным Академик Пресс.— М.: Статистика, 1976.— 295 с.
47. Кендал М. Ранговая корреляция.— М.: Статистика, 1975.— 213 с.
48. Кикоть В. С. Планирование эксперимента в задачах самоорганизации математических моделей.— Автоматика, 1984, № 1, с. 32—39.

49. Клейн Л. Р., Мюллер И. А., Ивахненко А. Г. Моделирование экономики США при помощи самоорганизации систем управления.— Автоматика, 1980, № 1, с. 3—13.
50. Козубовский С. Ф., Юрачковский Ю. П. Информационные критерии селекции моделей.— Автоматика, 1981, № 4, с. 80—89.
51. Кондрашева Н. В. Алгоритм самоорганизации схемы замещения процесса деструкции пестицидов.— В кн.: Самоорганизация кибернетических систем.— Киев: Ин-т Кибернетики АН УССР, 1980, с. 59—69.
52. Кононов К. Е., Розенберг Г. С. Прогнозирование урожая сена с помощью гидрометеорологических факторов по методу самоорганизации.— Биол. науки, 1981, № 3, с. 99—104.
53. Копысицкий Т. И., Юсифов Р. Ю. К применению МГУА для идентификации объектов нефтехимии и нефтепереработки.— Автоматика, 1978, № 6, с. 3—8.
54. Коппа Ю. В., Эзакели В. И., Лантаева Д. Н. Математическое моделирование технологического процесса прокатки труб на основе принципа самоорганизации.— Автоматика, 1984, № 3, с. 61—66.
55. Макаров И. Н., Соколов В. И., Убрамов А. А. Целевые комплексные программы.— М.: Знание, 1980.— 210 с.
56. Маттес Б., Мюллер И. Прогнозирование временных рядов с помощью динамических моделей.— Автоматика, 1982, № 4, с. 26—36.
57. Моделирование как метод научного познания: Гносеологический анализ / В. А. Глинский, В. С. Грязьков, В. С. Дынин и др.— М.: Изд-во МГУ, 1965.— 160 с.
58. Моисеев Н. Н. Человек, среда, общество.— М.: Наука, 1982.— 240 с.
59. Нагель Э., Ньюмен Д. Теорема Геделя.— М.: Знание, 1970.— 62 с.
60. Налимов В. В. Вероятностная модель языка.— М.: Наука, 1981.— 271 с.
61. Налимов В. В. Теория эксперимента.— М.: Наука, 1971.— 200 с.
62. Объективный системный анализ и двухуровневый долгосрочный прогноз для экосистемы Каховского и Кременчугского водохранилищ / А. Г. Ивахненко, А. А. Сиренко, А. И. Денисова и др.— Автоматика, 1984, № 2, с. 30—41.
63. Остром К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления.— М.: Мир, 1973.— 321 с.
64. Пелинг В. Образование структур при необратимых процессах.— М.: Мир, 1978.— 280 с.
65. Перцептрон — система распознавания образов / Под ред. А. Г. Ивахненко.— Киев: Наук. думка, 1975.— 419 с.
66. Прогнозы развития природных явлений / З. К. Алешкина, Т. В. Бережных, Т. И. Власова и др.— Новосибирск: Наук. Сиб. отд-ние, 1982.— 202 с.
67. Растрингин Л. А., Маджаров Н. Е. Введение в идентификацию объектов управления.— М.: Энергия, 1977.— 215 с.
68. Розенберг Г. С. Сравнение различных методов экологического прогнозирования: Прогноз динамики экосистем.— Экология, 1981, № 1, с. 12—18.
69. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептроны и теория механизмов мозга.— М.: Мир, 1965.— 467 с.
70. Самоорганизация комбинированных моделей для прогнозирования циклических процессов с использованием критерия баланса прогнозов / А. Г. Ивахненко, В. С. Степашко, Ю. В. Костенко и др.— Автоматика, 1979, № 2, с. 8—22.
71. Светальский Б. К., Ковальчук П. И. Многокритерный алгоритм МГУА с селекцией первичных аргументов.— Автоматика, 1979, № 4, с. 36—43.
72. Семенов В. А., Симонов В. Д. Формирование гипотез в аналитической химии с помощью ЭВМ.— М.: Химия, 1976.— 135 с.
73. Справочник по типовым программам моделирования / А. Г. Ивахненко, Ю. В. Коппа, В. С. Степашко и др.— Киев: Техніка, 1980.— 183 с.
74. Спектральный анализ экосистемы оз. Байкал и долгосрочный прогноз по инвариантам / О. М. Кожова, Л. Я. Ащепкова, И. П. Жук и др.— Автоматика, 1984, № 6, с. 11—26.
75. Статистическая оценка экспериментальных данных по торможению искусственных спутников Земли / Е. И. Бушуев, А. И. Васильева, Е. Я. Егорцева и др.— В кн.: Определение движения космических аппаратов.— М.: Наука, 1975.— 198 с.

76. Степашко В. С. Конечная селекционная процедура сокращения полного перебора моделей.— Автоматика, 1983, № 4, с. 84—88.
77. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 285 с.
78. Тумаков Н. В. Алгоритм МГУА со взаимно-ортогональными частотными описаниями.— Автоматика, 1978, № 3, с. 85—90.
79. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте.— М.: Наука, 1982.— 111 с.
80. Форрестер Дж. Мировая динамика.— М.: Наука, 1978.— 165 с.
81. Флейшман Б. С. Элементы теории потенциальной эффективности сложных систем.— М.: Сов. радио, 1971.— 224 с.
82. Фогель Дж., Оцеж Дж., Уолш Л. Моделирование эволюции и искусственный интеллект.— М.: Мир, 1969.— 280 с.
83. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М.: Наука, 1979.— 368 с.
84. Хейс Д. Причинный анализ в статистических исследованиях.— М.: Финансы и статистика, 1982.— 740 с.
85. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.— 512 с.
86. Хомовненко М. Г. Самоорганизация потенциально эффективных моделей урожайности для АСУ оросительной системой.— Автоматика, 1981, № 6, с. 61—70.
87. Хомовненко М. Г., Коломиец Н. Г. Самоорганизация систем простых частных моделей, прогнозирующих урожай пшеницы.— Автоматика, 1980, № 1, с. 28—37.
88. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.— 399 с.
89. Чижевский А. Л. Земное эхо солнечных бурь.— М.: Мысль, 1976.— 367 с.
90. Шелудько О. И. Алгоритм МГУА с ортогонализованным полным описанием для синтеза моделей по результатам планируемого эксперимента.— Автоматика, 1974, № 5, с. 32—42.
91. Эшби У. Росс. Схема усилителя мыслительных способностей.— В кн: Автоматы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1970.— 401 с.
92. Юрачковский Ю. П. Восстановление полиномиальных зависимостей на основе самоорганизации.— Автоматика, 1981, № 4, с. 15—20.
93. Юрачковский Ю. П. Сходимость многокритерных алгоритмов МГУА.— Автоматика, 1981, № 3, с. 32—36.
94. Юрачковский Ю. П., Грошков А. Н. Оптимальное разбиение исходных данных на обучающую и проверочную последовательности на основе анализа функций распределения критерия.— Автоматика, 1980, № 2, с. 5—12.
95. Юрачковский Ю. П., Грошков А. Н. Применение канонической формы внешних критериев для исследования их свойств.— Автоматика, 1979, № 3, с. 85—89.
96. Åström K. J. Maximum likelihood and Prediction Error Method.— Automatica, 1980, Vol. 16, p. 551—574.
97. Duffy J. J., Franklin M. A. A Case Study of Environmental System Modeling with Group Method of Data Handling.— Proceedings of the 1973 JACC, Ohio State University, Columbia, Ohio, 1973, p. 101—111.
98. Duffy J. J., Franklin M. A. A Learning Identification Algorithm and Its Application to an Environmental System.— IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1975, Vol. SMC—5, No 5, p. 226—240.
99. Ikeda S. M., Ochiai M., Sawaragi Y. Sequential GMDH Algorithm and its Application to River Flow Prediction.— IEEE Trans. on System., Man., Cybern., 1976, Vol. SMC—6, No 7, p. 473—479.
100. Fisher R. The Influence of Rainfall on the Yield of Wheat at Rotamsted.— Phil Trans. Roy. Soc., Ser. B. 1925, No 213, p. 3.
101. Hausteин H. D., Hoffmann H. Zur Ökonomischen Analyse langfristiger Tendenzen des technischen Niveaus der Fertigung im sozialistischen Industriebetrieb.— Wiss. Ztschr., Hochschule für Ökonomie «B. Leusehner», 1976, H.4, S. 98—111.
102. Ivakhnenko A. G. Polynomial Theory of Complex Systems.— IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1971, Vol. SMC—1, No 4, p. 364—378.

103. **Maciejowski J. M.** Model discrimination using an Algorithmic Information Criterion.— *Automatica*, 1979, Vol. 15, No 6. p. 579—593.
104. **Marchev A. A., Ivakhnenko N. A., Müller J. A.** Vorhersage auf Prinzip der Selbstorganisation Beruhen.— 2. Inter Symposium der RGW—Mitgliedslander zu Problemen der wissenschaftlich-technischen Vorhersage.— Sofia, 1980, 21 S.
105. **Marchev A. A., Müller J. A., Topolski B. K.** Anwendung des Prinzips der Selbstorganisation bei betriebswirtschaftlichen Systemuntersuchungen. IX. Internat. Kongress über Anwendung der Mathematik in der Ingenieurwissenschaften.— Weimar, 1981, 10 S.
106. **Matthes B., Müller J. A.** Extrapolation stochastischer Prozesse.— *Messen, Steuern, Regeln*, 1978, 21. H.3, s. 139—143.
107. **Mehra R. K.** Group Method of Data Handling Algorithm (GMDH): Review and Experience.— *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, 1977, p. 29—34.
108. **Mustafi A., Chaudhuri A. S.** Use of Multilayer Group Method of Data Handling for Prediction Tea Crop Production.— *Journal of the India Society of Agriculture — al Statistics*, 1981, Vol. 33, No 1, p. 89.
109. **Müller J. A.** Identification and Vorhersage bei ungenügender A— priori Information.— *Messen, Steuern, Regeln*, 1976, Vol. 19, H. 12. S. 407—409.
110. **Müller J. A., Ivakhnenko A. G.** Selbstorganisation mathematischer Modelle auf der EDV—Anlage und ihre Anwendung zur Vorhersage.— *Messen, Steuern Regeln*, 1980, 23, H. 11, S. 645—648.
111. **Sawaragi Y., Soelda T., Tamura H.** Statistical Prediction of Air Pollution Levels Using Non—Physical Models.— *Automatica*, 1979, Vol. 15, No 4, p. 441—451.
112. Self-organizing methods in modelling: GMDH Type Algorithms/Edited by Stanley J. Farlow.— *Statistics: Textbooks and Monographs*, vol. 54, 1984, p. 350.